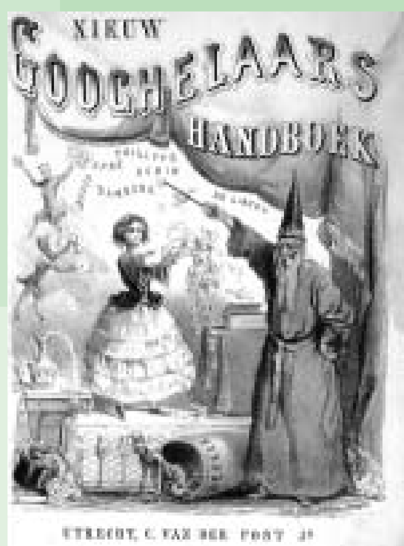
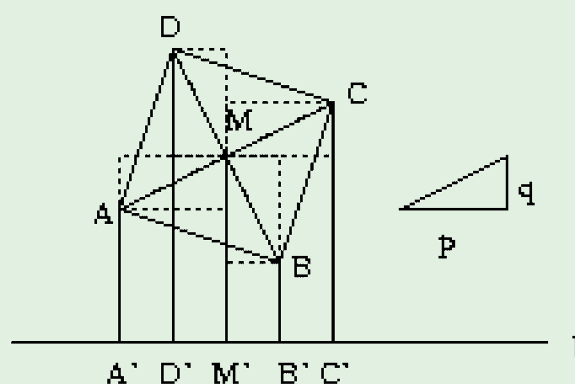
Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar
jaargang 75
1999-2000 juni
8





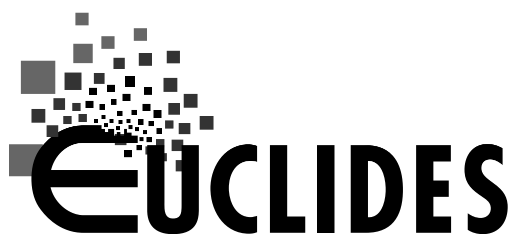


Ladderproblemen

Wiskunde
op het MTO

Wisconstighe
Vermaecklyckheden:
het googchelaars-
handboek





Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per verenigingsjaar.

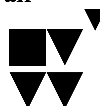
Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen naar:
Kees Hoogland
Veldzichtstraat 24
3731 GH De Bilt
e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

Richtlijnen voor artikelen:
- goede afdruk met illustraties/foto's/formules op juiste plaats of goed in de tekst aangegeven.
- platte tekst op diskette: WP, Word of ASCII.
- illustraties/foto's/formules op aparte vellen: genummerd, zwart/wit, scherp contrast.

Richtlijnen voor mededelingen:
- zie kalender achterin.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren



www.nvvw.nl

Voorzitter
Drs. M. Kollenveld
Leeuwendaallaan 43
2281 GK Rijswijk
tel. 070-3906378
e-mail: M.Kollenveld@nvvw.nl
Secretaris
W. Kuipers
Waalstraat 8
8052 AE Hattem
tel. 038-4447017
e-mail:
W.Kuipers@nvvw.nl
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks
De Schalm 19
8251 LB Dronten
tel. 0321-312543
e-mail: ledenadministratie@nvvw.nl

Contributie per ver. jaar: ƒ 80,00
Studentleden: ƒ 40,00
Leden van de VVWL: ƒ 55,00
Lidmaatschap zonder Euclides: ƒ 55,00
Betaling per acceptgiro. Nieuwe leden geven zich op bij de ledenadministratie. Opzeggingen vóór 1 juli.

Abonnementen niet-leden

Abonnementen gelden steeds vanaf het eerstvolgende nummer. Abonnementsprijs voor personen: ƒ 85,00 per jaar. Voor instituten en scholen: ƒ 240,00 per jaar. Betaling geschiedt per acceptgiro. Losse nummers op aanvraag leverbaar voor ƒ 30,00. Opzeggingen vóór 1 juli.

Advertenties
Informatie, prijsopgave en inzending:
L. Bozuwa, Merwekade 90
3311 TH Dordrecht, tel. 078-639 08 90
fax 078-6390891
e-mail lbozuwa@worldonline.nl
of
F. Mahieu, Dommeldal 12
5282 WC Boxtel, tel. 0411-67 34 68

Colofon
produktie TiekstraMedia, Groningen
druk Giethoorn Ten Brink, Meppel

Adresgegevens auteurs

A. van Asch
Benedenmolenweg 3D
4112 NS Beusichem

D. Beckers
KU Nijmegen
Vakgroep wiskunde
Postbus 9010
6500 GL Nijmegen

T. Goris
Freudenthal Instituut
Tiberdreef 4
3561 GG Utrecht

H. Montanus
Buñuellaan 16
1325 PL Almere

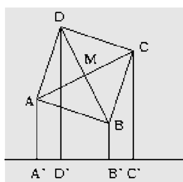
J. Smit
Houtsniplaan 31
1873 JT Groet

A. Verweij
TU Delft, Fac. ITS
Vakgroep AW
Mekelweg 4
2628 CD Delft

Inhoud


260


264



267

van de redactietafel

De laatste Euclides alweer van dit schooljaar. De examens zijn weer achter de rug. Dit jaar voor het eerst ook examens Tweede Fase, namelijk voor havo A12, B1 en B12.
Op het moment dat ik dit schrijf zijn de CEVO-normen nog niet bekend gemaakt en is er ook nog geen zicht op wat de leerlingen van de scholen, die vroeg gestart zijn met de Tweede Fase, zo gemiddeld op dit examen hebben gescoord. Het eerste nummer van de nieuwe jaargang zal traditiegetrouw in het teken staan van de examens. Daarin overzichten van de resultaten en bespreking van de examens.

Tweede Fase

Wiskunde in de Tweede Fase loopt niet van een leien dakje. Door een samenspel van allerlei factoren is het voor veel docenten erg lastig om goed de verschillende programma's te draaien.
Ik noem een aantal factoren die docenten melden:

- Weinig contact-uren en lastig om een goede werkwijze te vinden voor de contact-uren en zelfwerk-uren.
- A1-klassen met leerlingen die vroeger geen wiskunde kozen.
- In de B-groepen blijft het lastig te bepalen wat nu algebraïsch gedaan moet worden en wat met de Grafische Rekenmachine mag.
- Groepen leerlingen worden bij elkaar gezet, terwijl de programma's slechts deelverzamelingen zijn en de specifieke kwaliteiten van de leerlingen sterk verschillen.
- Veel veranderingen tijdens de rit, denk aan reducties en de omvang van het aantal praktische opdrachten.

Het uitwisselen van ervaringen uit de klas is een belangrijke manier om te zorgen dat er weer een soort traditie ontstaat hoe deze problemen aan te pakken.
Euclides kan met uw bijdragen daar een belangrijke rol in spelen.

Vmbo

Voor het vmbo komt er een belangrijk jaar aan. De vmbo-leerlingen zitten volgend jaar in de tweede klas en zullen voorbereid moeten worden op de keuze van leerwegen en sectoren. Daar zal wiskunde een belangrijke rol in spelen.
Wat eisen de verschillende sectoren nu precies aan wiskundekennis? En welk niveau wordt van de leerlingen verwacht in de verschillende leerwegen? Wat zullen de praktische opdrachten en het sectorwerkstuk gaan inhouden en hoe kun je leerlingen daar al in de tweede klas op voorbereiden?
De redactie zal u zo goed mogelijk op de hoogte proberen te houden.

Vereniging en Euclides

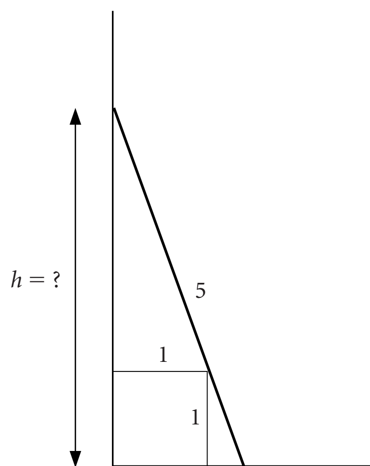
Het volgende nummer van Euclides dat op uw deurmat zal vallen is een zeer speciaal nummer. Namelijk jaargang 76, nummer 0.
Een nulnummer, dat vooral in het teken zal staan van het 75-jarig bestaan van de vereniging, het verschijnen van het jubileumboek, en het project De Nationale Doorsnee.
Ook op de website van de vereniging (www.nvvw.nl) kunt u hierover al van alles vinden.
Tevens wordt in het nulnummer de nieuwe vormgeving van Euclides gepresenteerd. De huidige vormgeving dateert van augustus 1994 en was naar het idee van bestuur en redactie weer eens toe aan een verversing.
We zijn erg benieuwd naar uw reacties. Het speciale nulnummer zal rond 20 augustus verschijnen. Als u voor de vakantie uw collega's nog gewoon even lid laat worden van de vereniging, dan krijgen die automatisch dat nulnummer ook. Voor die 80 gulden hoef je het toch niet te laten.

Kees Hoogland

Ladderproblemen en gehele getallen

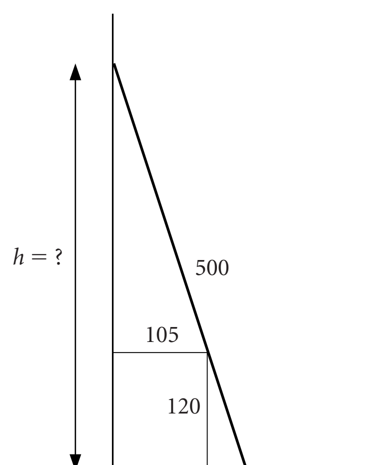
Hans Montanus en Jan Smit

Enige tijd geleden kwamen enkele leerlingen bij hun wiskunde leraar (H.M.) met het volgende probleem: een ladder van 5 m staat schuin tegen een muur en raakt tevens aan een 'vierkante' kist van 1 bij 1 m die ook tegen de muur staat (zie figuur 1). Op welke hoogte komt de ladder tegen de muur?



Figuur 1

Samen met de leerlingen ga je aan de slag. Maar we komen telkens uit op een vierdegraads vergelijking. "Goed jongens, dit is iets om thuis nog eens naar te kijken".

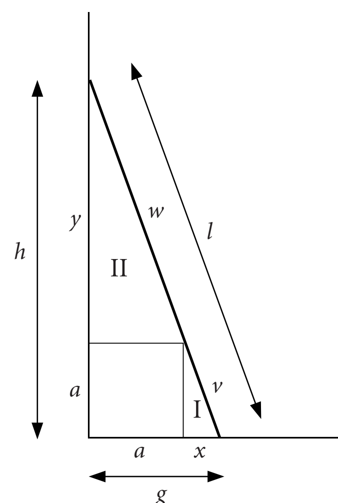


Figuur 2

Bij dit soort situaties is het aardig om bij een volgende gelegenheid niet alleen de oplossing van het probleem te geven, maar tevens een nieuw, verwant probleem aan de leerlingen voor te leggen.
Bijvoorbeeld, dezelfde ladder en dezelfde vraag als in voorgaand probleem. Alleen is de kist nu niet meer vierkant (zie figuur 2, maten in cm). Gegeven is ook dat de oplossing een geheel aantal cm is.
Het probleem met de vierkante kist is klassiek.[1] Het dankt zijn populariteit aan een geniepig trekje. Met de normale aanpak kom je uit op een vierdegraads vergelijking. Met een trucje is dit te vermijden. Het vraagstuk los je dan op door twee keer een vierkantsvergelijking op te lossen. Dit trucje werkt alleen bij een vierkante kist. Bij een rechthoekige kist ontsnap je niet aan de vierdegraads vergelijking. De wortels kunnen we natuurlijk numeriek benaderen. Dat is een geschikt klusje voor de grafische rekenmachine.[2] Echter, als de oplossing heeltallig is, dan kunnen we toch de exacte oplossing vinden door wat te knutselen met Pythagoras drietallen (P-drietallen). Dat zijn drie gehele getallen a, b en c die voldoen aan $a^2 + b^2 = c^2$.

De vierkante kist

We beschouwen de situatie als in figuur 3.



Figuur 3

Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken I en II volgt

$$xy = a^2 \qquad (1)$$

Verder geldt

$$(x+a)^2 + (y+a)^2 = l^2. \qquad (2)$$

Het ligt nu voor de hand om hierin $y = a^2/x$ te substitueren, maar dan ontstaat een vierdegraadsvergelijking. Deze valkuil is als volgt te vermijden: werk (2) uit en vervang de term $2a^2$ door $2xy$.
Zo krijg je: $(x+y)^2 + 2a(x+y) = l^2$. Deze vierkantsvergelijking voor $x+y$ heeft als realistische wortel $x+y = -a + \sqrt{a^2+l^2}$. Je hebt nu de som $x+y$ en het product $xy = a^2$. Hieruit kun je x en y bepalen en daarmee $h = a + y$. Het resultaat is

$$h = \tfrac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2+l^2} \pm \sqrt{l^2 - 2a^2 - 2a\sqrt{a^2+l^2}}\right). \qquad (3)$$

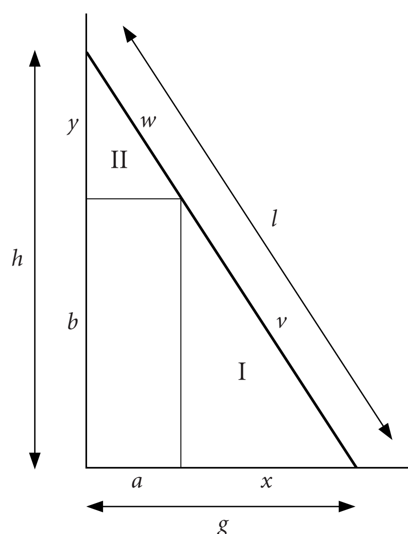
Wanneer deze afleiding stapsgewijs wordt uitgevoerd met getalswaarden voor a en l, is het voor de leerlingen goed te volgen. Het zoeken van verbanden op basis van gelijkvormigheid van driehoeken en het toepassen van de *abc*-formule zijn voor hen immers bekende technieken. Bovendien is het aardig om leerlingen in aanraking te laten komen met een situatie waarbij het nou eens niet verstandig is om het probleem te reduceren tot één variabele; althans niet te vroeg. Voor de afmetingen van figuur 1, $a = 1$ en $l = 5$, vinden we

$$h = \tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{26} \pm \sqrt{23 - 2\sqrt{26}}\right) \approx 4{,}84 \text{ of } 1{,}26 \text{ m.}$$

Aan de dubbele wortel zien we dat het de oplossing van een vierdegraads vergelijking betreft. Dit effect gaat verloren als we voor a en l hele getallen nemen zó dat alle wortels in (3) getrokken kunnen worden en de oplossing h ook een geheel getal blijkt te zijn. Bijvoorbeeld voor $a = 12$ en $l = 35$ vinden we met (3) dat $h = 28$ en $g = 21$ (of $h = 21$ en $g = 28$). Nu mag het vanuit didactisch oogpunt niet doelmatig zijn om de afmetingen van de kist en de ladder zo te kiezen dat de wortels verdwijnen, vanuit getallentheoretisch oogpunt is het juist wel interessant om te kijken voor welke hele getallen a en l de oplossing h volgens (3) ook een heel getal is. Eén manier om zulke waarden van a en l te vinden zou zijn: kijk naar formule (3). Als we a en l zo kiezen dat $\left(a, l, \sqrt{a^2+l^2}\right)$ een P-drietal is, dan verdwijnen er in (3) alvast twee wortels. Bijvoorbeeld als $a = 11$, $l = 60$ $\left(\sqrt{a^2+l^2} = 61\right)$ vinden we $h = 36 \pm 6\sqrt{14}$. Nu moeten we dus nog verdere beperkingen aan a en l opleggen om ook de derde wortel in (3) te laten verdwijnen. Zoals bekend kunnen P-drietallen $\left(a, l, \sqrt{a^2+l^2}\right)$ worden geparametriseerd via $a = u^2 - t^2$, $l = 2ut$ en $\sqrt{a^2+l^2} = u^2 + t^2$, waarbij u en t heeltallige parameters zijn. Voor de hoogte h vinden we dan $h = u^2 \pm u\sqrt{2t^2 - u^2}$. De derde wortel verdwijnt als $2t^2 - u^2 = z^2$ met z heeltallig. Dit betekent dat u en z beide even of beide oneven zijn. In beide gevallen kunnen ze geschreven worden als $u = s + r$ en $u = s - r$ met s en r heeltallig. Hiermee gaat $2t^2 - u^2 = z^2$ over in $r^2 + s^2 = t^2$. Dus r, s en t vormen ook een P-drietal. Aldus vinden we $a = 2rs$ en $l = 2t(r+s)$. Na deling door de gemeenschappelijke factor 2 (als a en l een gemeenschappelijke deler hebben, dan heeft h ook die deler) vinden we voor a en l de volgende uitdrukkingen: $a = rs$ en $l = (r+s)t$. Gehele veelvouden (k-vouden) hiervan voldoen natuurlijk ook: $a = krs$ en $l = k(r+s)t$.
Bovenstaande algebraïsche afleiding was mogelijk omdat we over formule (3) beschikten. Voor de situatie met een rechthoekige kist hebben we een dergelijke formule niet. Er is gelukkig een andere manier om heeltallige oplossingen te vinden. Daarbij hebben we formule (3) helemaal niet nodig. Deze aanpak blijkt tevens geschikt te zijn voor de situatie met een rechthoekige kist.

De rechthoekige kist

In figuur 4 is de situatie geschetst met een rechthoekige kist met zijden a en b.



Figuur 4

We vragen ons eerst af hoe lang de ladder minstens moet zijn. Uit de gelijkvormigheid van de driehoeken I en II volgt nu $xy = ab$. Substitutie van dit verband in de stelling van Pythagoras leidt tot

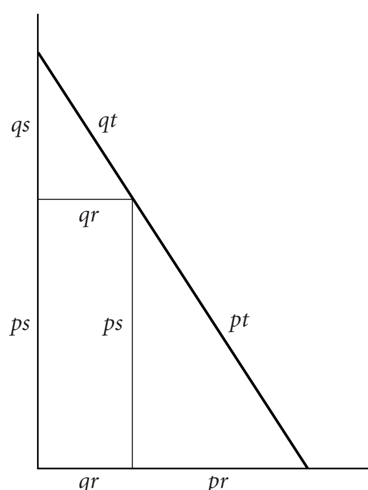
$$l^2 = (x+a)^2 + \left(\frac{ab}{x} + b\right)^2. \qquad (4)$$

Dit kunnen de leerlingen zelf en ze weten ook het minimum voor l^2 (en dus voor l) te vinden. Er komt iets moois uit. Het minimum wordt bereikt voor $x^3 = ab^2$ en $y^3 = a^2b$. De minimale ladderlengte voldoet aan

$$l^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}. \qquad (5)$$

Een heeltallige oplossing voor de situatie met minimale ladderlengte is nu snel gevonden door voor a, b en l de derde machten te nemen van een P-drietal. Nemen we bijvoorbeeld het eenvoudigste P-drietal (3, 4, 5) als basis, dan is $a = 27$, $b = 64$, $l = 125$, $h = 100$ en $g = 75$.

Ook als de ladder langer is dan de minimale lengte willen we kijken naar heeltallige oplossingen. We stellen ons dus de vraag of we gehele getallen kunnen bedenken voor de afmetingen van de rechthoekige kist en de ladder zó dat de hoogte h ook een geheel getal is. De driehoeken I en II moeten dan gehele veelvouden zijn van een Pythagoras driehoek (r, s, t) met $t^2 = r^2 + s^2$. Immers, als a, b, l en h geheel zijn, is $y = h - b$ ook geheel. Uit $w : y = l : h$ volgt dat de schuine zijde w van driehoek II rationaal is, een breuk dus. Anderzijds volgt uit $w^2 = a^2 + y^2$ dat w^2 geheel is. Te samen kan dat alleen als w geheel is. Bijgevolg is $v = l - w$ ook geheel is. Tenslotte volgt uit $x : b = a : y$ dat x rationaal is en uit $x^2 = v^2 - b^2$ dat x^2 geheel is. Dus x is ook geheel.
Neem nu een p-voud van driehoek (r, s, t) voor driehoek I en een q-voud voor driehoek II. Dan hebben we de situatie van figuur 5.



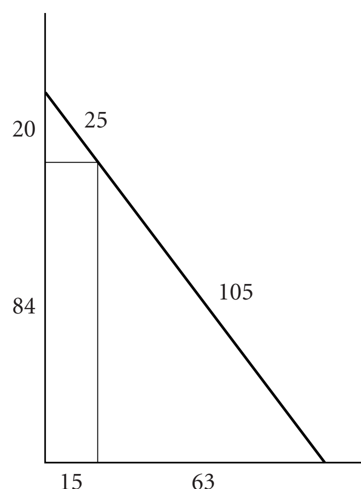
Figuur 5

De afmetingen worden dan gegeven door $a = qr$, $b = ps$, $l = (p + q)t$ en $h = (p + q)s$. Een probleem als dat van figuur 2 kun je nu als volgt kraken. Zoek een P-drietal (r, s, t) zó dat r een deler van a is, s een deler van b en t een deler van l en zó dat

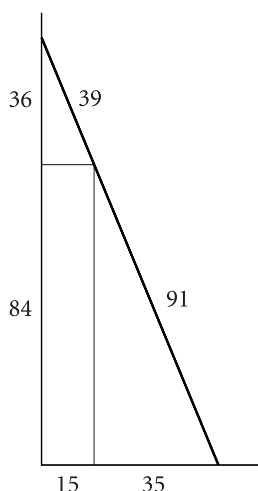
$$\frac{a}{r} + \frac{b}{s} = \frac{l}{t}.$$

Voor $a = 105$, $b = 120$ en $l = 500$ vinden we na enig puzzelen $r = 7$, $s = 24$, $t = 25$, $p = 5$ en $q = 15$. Voor de hoogte waarop de ladder tegen de muur rust vinden we dan: $h = 480$ cm.

Indien l groter is dan de minimale ladderlengte, zijn er twee ladderstanden mogelijk als oplossing. Bij de vierkante kist leidde dit tot rolverwisseling van g en h, maar bij de rechthoekige kist zijn er twee verschillende paren g en h. De volgende vraag dringt zich nu op. Is het mogelijk a, b en l zó te kiezen dat er twee heeltallige oplossingen voor h zijn? Uit het volgende voorbeeld blijkt dat dit bevestigend kan worden beantwoord. Voor een rechthoekige kist van 15 bij 84 zijn de twee standen van een ladder met lengte 130 zodanig dat de hoogte ook heeltallig is (zie figuren 6 en 7).



Figuur 6



Figuur 7

KORREL

Tellen …

Geachte redactie,

Al geruime tijd ontvang ik ten onrechte uw verenigingsblad ‘Euclides’. Ik zeg ten onrechte, daar ik lid noch abonnementshouder ben. De reden dat ik toch uw blad ontvang is dat na de verhuizing van de vorige bewoners van mijn woning, zij ‘vergeten’ zijn u een adreswijziging te sturen. Ondanks mijn achtergrond (biologie) heb ik inmiddels vele malen met veel plezier uw blad gelezen. Ik stuitte in nummer 75-7 op de herontdekte rubriek Korrel en de oproep iets in te zenden, prikkelde mij.

Ik kan mij namelijk een voorval herinneren met mijn eigen wiskundeleraar:
Ik had mijn diploma gehaald en bij de borrel na de uitreiking trof ik mijn wiskundeleraar. Hij was daar met zijn zoontje, die in de leeftijd was van het beginnen met tellen. De absolute leeftijd weet ik niet, want getallen zeggen mij niet zo veel. Deze jonge knaap echter wel, want ik vroeg hem: ‘Zo, jij kan natuurlijk al tellen.’ Hij antwoordde: ‘ja hoor, één, … twee, …, èhèh, … drie, … pie, … vier.’
Ik wist niet wat ik hoorde. Geschokt en geamuseerd keek ik mijn docent aan. Hij, op zijn beurt, werd rood en wist niet hoe te reageren.
Nu richt ik mij tot de lezer: ‘Bent u ook zo didactisch en pedagogisch onderlegd’?

Met vriendelijke groet,

een leek.

In de historie van Euclides hebben er heel lang Korrels bestaan: korte prikkelende of kritische stukjes over actuele zaken of ervaringen. Dit is de tweede in een nieuwe reeks. Wie schrijft de Korrel voor het volgende (examen)nummer? Voor 6 juli moet uw bijdrage bij de redactie zijn.

De redactie

In deze figuren vormen de P-drietallen (3, 4, 5) en (5, 12, 13) de bouwstenen. Door andere paren P-drietallen als bouwstenen te nemen kunnen andere voorbeelden worden gevonden.

Tot slot keren we nog even terug naar de situatie met de vierkante kist. In dat geval is a $(= b)$ een veelvoud van zowel r als s. Dat kan alleen als $a = b = krs$ (namelijk $p = kr$ en $q = ks$). Dan is $l = k(r + s)t$ en $h = k(r + s)s$ en dat is dus de algemene gedaante voor heeltallige afmetingen van de ladder en de vierkante kist. Het eenvoudigste voorbeeld ontstaat voor $k = 1$ en $(r, s, t) = (3, 4, 5)$. De bijbehorende afmetingen, $a = 12$, $l = 35$ en $h = 28$, stonden model voor het eerder in de tekst gegeven voorbeeld.

Literatuur

1 *David Wells*
The Penguin Book of Curious and Interesting Puzzels
1992, problem 399.
Ook in het Nederlands:
Merkwaardig en Interessante Puzzels
Bert Bakker, 1995.

2 *S. Kemme*
Een echt probleem voor de Grafische Rekenmachine
Nieuwe Wiskrant, dec. 1998, p. 24.

Wiskunde op het MTO in beweging

Tom Goris

Inleiding

Donderdag 20 januari 2000 bereikte het TWIN-project een mijlpaal: de eerste 'landelijke' experimentele toets voor de doorstroomkwalificatie HBO, ofwel: het landelijk examen nieuwe stijl.
Deze experimentele toets is afgenomen op de kernscholen van het TWIN-project, de scholen die vier jaar geleden als eerste met het TWIN-materiaal, gebaseerd op de nieuwe eindtermen, aan de slag gegaan zijn.

TWIN

TWIN (Techniek, Wiskunde, ICT, Natuurkunde) is een project voor curriculumvernieuwing in het MTO, een soort inhaalslag om ook de wiskunde in dit schooltype een realistisch karakter te geven. De uitgangspunten voor het schrijven van de TWIN-methode waren:

- Aansluiting op het veranderde voortraject
- Ondersteuning voor de technische vakken
- Implementatie ICT door het integreren van de Grafische Rekenmachine en het ontwikkelen van JAVA-applets
- Aansluiting op het HTO

Deze toets was het eindstation voor studenten die door willen stromen naar het HTO; ongeveer een kwart van de MTO'ers kiest voor deze doorstroomkwalificatie.
De volledige toets en uitvoerige informatie over het TWIN-project is te vinden op de website van TWIN: www.fi.uu.nl/twin

De opgaven

Hierna treft u een tweetal opgaven uit deze toets aan waar het gebruik van de grafische rekenmachine (GRM) een belangrijke rol speelt. De studenten in het MTO die met het TWIN-materiaal geschoold worden gebruiken de GRM vanaf het begin van hun opleiding, dus niet alleen in de doorstroomvariant. De toets is dan ook zo samengesteld dat het gebruik van de GRM vereist is. En wel in 'niet-geresette' toestand: in het doorstroom-TWIN-materiaal zijn kleine hulpprogrammaatjes voor de GRM ontwikkeld die bij deze toets gebruikt konden en mochten worden.

Op dit moment worden de uitwerkingen van alle ± 75 kandidaten zorgvuldig onderzocht naar de manier waarop de mededeling:
"*Als de grafische rekenmachine is gebruikt bij het beantwoorden van een vraag, dan moet kort beschreven worden hoe hij is gebruikt.*" gestalte heeft gekregen. Een verslag hiervan treft u binnenkort aan in de Nieuwe Wiskrant.

De docenten van de kernscholen waren unaniem van mening dat deze toets qua inhoud en niveau recht doet aan het TWIN-materiaal en dat het resultaat significante informatie geeft over de te verwachten resultaten in het HTO.

Tot slot

Hoewel het TWIN-project in augustus afloopt hopen de TWIN-medewerkers die laatste stelling te kunnen verifiëren. Met andere woorden: we blijven onze *proefkonijnen* volgen!

OPGAVE 3 VLIEGEN

Een vliegtuig ondervindt twee soorten weerstand van de lucht.

- De *luchtweerstand* F_l

Deze weerstand is recht evenredig met het kwadraat van de snelheid.
Voor een Boeing 747 geldt:

$$F_l = 3 \cdot v^2$$

F_l is in N, v is in m/s.

- De *inductieweerstand* F_i

Deze weerstand neemt af als de snelheid groter wordt. Bij een hogere snelheid van het vliegtuig is de luchtstroom onder de vleugels groter. En die luchtstroom is nodig om te kunnen vliegen. F_i is onder andere recht evenredig met het kwadraat van het gewicht en omgekeerd evenredig met het kwadraat van de snelheid.
Voor een Boeing 747 geldt:

$$F_i = 7{,}5 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{G^2}{v^2}$$

F_i en G in N, en v in m/s

De totale weerstand F_t die een vliegtuig ondervindt, is de som van de luchtweerstand en de inductieweerstand.
Je vliegt het meest efficiënt met de snelheid waarbij de totale weerstand het kleinst is.





Het startgewicht van een Boeing 747 is $4 \cdot 10^6$ Newton (400 ton).
Gebruik dit gewicht bij de vragen 9, 10 en 1

6p ❑ **9** Teken op de GRM de grafieken van F_l , F_i en F_t als functie van v.
Gebruik als windowinstelling voor X: [0,500] en voor Y: [0,1000000]
Maak op papier een schets van deze drie grafieken.

4p ❑ **10** Bij welke snelheid vliegt een Boeing 747 het meest efficiënt? Licht je antwoord toe.

6p ❑ **11** Bepaal de afgeleide van de functie F_t
Controleer met de afgeleide functie het antwoord van vraag **10.**

Tijdens de vlucht wordt het gewicht van de Boeing 747 kleiner door het enorme brandstofverbruik van zo'n 10 ton per uur.
Een Boeing 747 vliegt non-stop van Amsterdam naar San Francisco, een vlucht van 11 uur.
De piloot wil de hele vlucht op de meest efficiënte manier blijven vliegen.

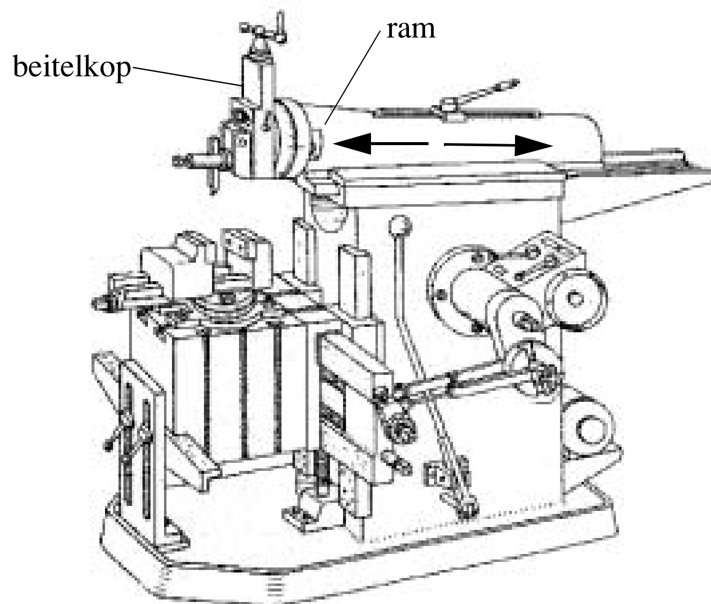
6p ❑ **12** Hoe moet hij zijn snelheid tijdens de vlucht veranderen?
Leg uit hoe je dat onderzocht hebt.

De totale weerstand blijkt bij ieder gewicht G minimaal bij de snelheid v waarvoor geldt: $F_l = F_i$

6p ❑ **13** Toon met de formules van F_l en F_i en de afgeleiden aan dat deze bewering klopt.

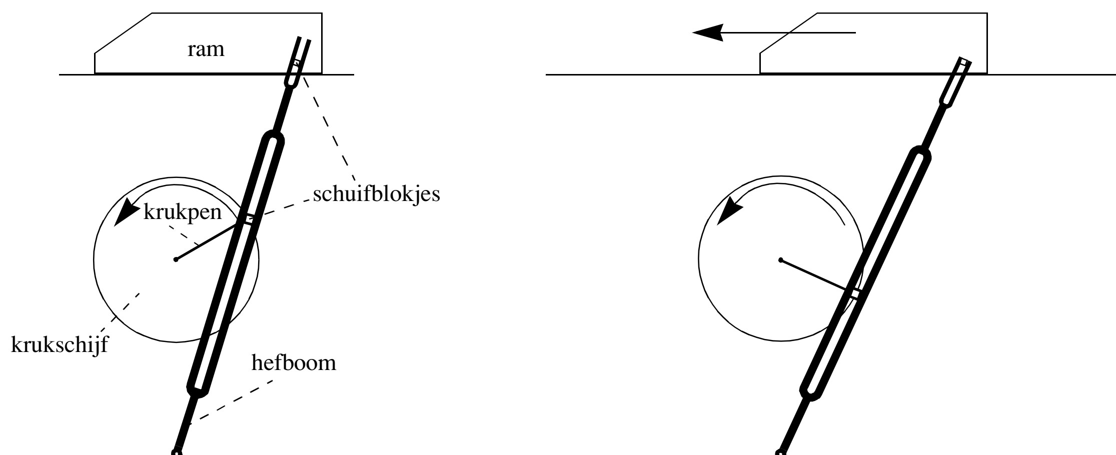
OPGAVE 4 DE STERKE-ARM SCHAAFMACHINE

Dit is een afbeelding van een *sterke-arm schaafmachine*.
Een ingenieus aandrijfmechanisme zorgt voor de heen en weer gaande beweging van de *ram*.
Alleen wanneer de ram naar links beweegt wordt er geschaafd: de *schaafslag*.
Bij de *terugslag* (de beweging van de ram naar rechts) wordt er niet geschaafd.



In figuur 3 zie je dat aandrijfmechanisme.
Een hefboom is door middel van een krukpen en een schuifblokje verbonden aan een krukschijf.
De hefboom is met een schuifblokje bevestigd aan de ram. De ronddraaiende beweging van de krukschijf wordt hierdoor omgezet in een heen en weer gaande beweging van de ram.

figuur 3



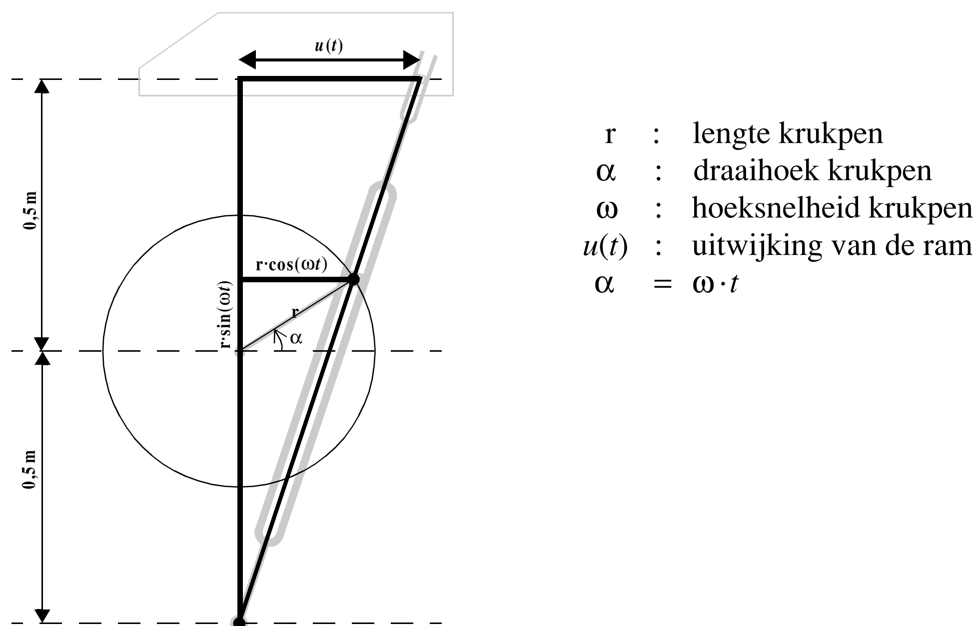
Het rechter plaatje van figuur 3 toont de stand van de hefboom aan het begin van de schaafslag.
De krukschijf draait met constante snelheid rond.

5p ❑ **14** Beredeneer aan de hand van figuur 3 waarom de schaafslag langer duurt dan de terugslag.

De beweging van de ram kan met een u-t functie worden beschreven.

Om deze formule af te leiden is in figuur 4 het aandrijfmechanisme schematisch weergegeven:

figuur 4



Het functievoorschrift van *u* is:

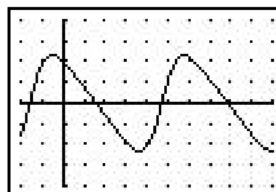
$$u(t) = \frac{r\cos(\omega t)}{0{,}5 + r\sin(\omega t)}$$

6p ❑ **15** Leg uit hoe dit functievoorschrift met behulp van figuur 4 kan worden gevonden.

De lengte van de krukpen en de hoeksnelheid worden ingesteld op r = 0,25 m en ω = 2 rad/s
Bij deze waarden ziet de grafiek op de GRM er als volgt uit:

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=0.25cos(2X)/
(0.5+0.25sin(2X)
)
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
```

```
WINDOW
 Xmin=-1
 Xmax=5
 Xscl=.5
 Ymin=-1
 Ymax=1
 Yscl=.25
 Xres=1
```



Op werkblad 3 is de grafiek vergroot een aantal keer afgedrukt.
Je kunt deze afdrukken eventueel gebruiken bij de beantwoording van de vragen 16 t/m 20.

4p ❑ **16** Bepaal de hoek α (in graden nauwkeurig) die hoort bij het begin van de schaafslag.

Het mooie van dit aandrijfmechanisme is dat de schaafbeweging met een vrijwel constante snelheid verloopt.

2p ❑ **17** Waaruit blijkt dat die snelheid vrijwel constant is?

4p ❑ **18** Bepaal de snelheid van de ram halverwege de schaafslag.

4p ❑ **19** Bij welke draaihoek α (tussen 0 en 2π) heeft de ram zijn maximale snelheid?

4p ❑ **20** Bepaal de grootte van die maximale snelheid.

.

INTERVIEW

Gezien de verschillen

In kringen van het wiskundeonderwijs in Nederland is de naam **Van der Blij** een zeer bekende. Toch is het voor de lezers wellicht aardig ook wat persoonlijke dingen te vertellen.

Op de lagere school heb ik lange tijd het idee gehad om naar de ambachtsschool te gaan; de techniek trok mij zeer aan. Het hoofd van de school adviseerde mij echter om naar de HBS te gaan, met als argument dat het daarna gemakkelijk was om door te gaan op de MTS (vergelijkbaar met de huidige HTS). Op de lagere school was ik al geboeid door puzzeltjes die met rekenen te maken hadden. Bijvoorbeeld van de soort: als "JAN + PIET = RUZIE", welke getallen stellen de letters dan voor? Op de HBS zette zich dit voort met veel belangstelling voor de wiskunde. In de vierde klas kreeg ik een wiskundeleraar die privé-lessen gaf om de wiskundige activiteiten bij leerlingen te stimuleren. Hij gaf mij boeken over differentiaalrekening en integraalrekening. In die tijd was het mogelijk om in de hoogste klassen van de HBS al te studeren voor de zogernaamde K1-akte. Mijn wiskundeleraar raadde mij dit overigens af met het argument dat dit ouderwetse wiskunde was. Hij adviseerde mij om op de universiteit te gaan studeren. Ik studeerde eerst in Leiden, vervolgens in Utrecht, en ten slotte weer in Leiden. Ik ben ook in Leiden gepromoveerd. Op de HBS in Warffum, en op het gymnasium in Breda was ik enige tijd wiskundeleraar, alvorens in 1953 naar de universiteit van Utrecht te gaan. Daar ben ik tot mijn pensionering in 1988 gebleven. Onder invloed van Freudenthal ging ik mij ook weer meer met het voortgezet onderwijs bezighouden. Het was de tijd van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde waarin ik als lid benoemd werd. Er was toen veel beweging in het wiskundeonderwijs, men vond dat er modernere dingen in aan bod moesten komen. De invoering van de Mammoetwet leverde veel werk op voor de commissie. In 1971 werd het IOWO gestart, wat later over zou gaan in OW&OC. Na Freudenthals terugtreden leidde ik tot mijn pensionering deze vakgroep. Binnen het IOWO en later OW&OC werd er zowel aan het rekenonderwijs voor de basisschool als aan de wiskunde in het voortgezet onderwijs gewerkt; ik heb mij voornamelijk met het voortgezet onderwijs beziggehouden. Na deze periode ben ik nog voorzitter van de werkgroep 12 - 16 geweest.

Het vak wiskunde neemt om allerlei redenen een aparte plaats in in het voortgezet onderwijs. Wat zou dit voor de leerlingen moeten betekenen?

Gezien de verschillende begaafdheden van kinderen is een lange brugperiode aan het begin van het voortgezet onderwijs voor wat betreft wiskunde niet gewenst. Voor de leerlingen met aanleg voor wiskunde is er niet genoeg uitdaging, en voor de leerlingen die zwak in het vak zijn wordt het op den duur erg vervelend. Het is ook voor leraren heel moeilijk om gedurende een lange brugperiode alle leerlingen voldoende tot hun recht te laten komen. Ik ben er daarom voorstander van kinderen na een korte brugperiode uit te splitsen, in elk geval voor het vak wiskunde.

Toen de basisvorming werd ingevoerd was het mijn ideaal om drie niveaus in te voeren: wiskunde op lbo a/b niveau, wiskunde op mavo c/d niveau, en wiskunde op havo/vwo niveau. Toen de plannen voor de basisvorming voor de eerste keer werden aangeboden werd er nog van drie niveaus uitgegaan. Dit werd echter onmiddellijk afgekeurd en het werk moest maar opnieuw gedaan worden, waarna er formeel twee niveaus werden vastgesteld. Mijn advies in de huidige situatie is om op categorale vwo-scholen de wiskunde in de eerste drie jaar op een veel hoger niveau aan te bieden dan volgens de basisvorming vereist is. Op een bredere scholengemeenschap met



Een typerende foto van Van der Blij als gedreven docent en uitlegger. *Nationale Wiskunde Dagen 1997.*

Met dank aan de Nieuwe Wiskrant, waaruit deze foto werd overgenomen.

heterogene klassen zal dit voor een leraar waarschijnlijk wel onmogelijk zijn. In de onderbouw kunnen voor de goede leerlingen de kangoeroe-wedstrijden een goede prikkel zijn, en voor de bovenbouw de wiskunde-olympiade. Een belangrijk element voor het stimuleren van de betere leerlingen moet naast het probleem-oplossen ook het aanbieden van enige theorie zijn.

De basisvorming draait nu al een aantal jaren. In evaluaties is er niet altijd een positief beeld naar voren gekomen. Hoe kijkt u daar nu tegen aan?
Zoals al opgemerkt kent de basisvorming formeel twee niveaus. Ook op het hoogste niveau komen leerlingen met een meer dan normale begaafdheid en interesse in wiskunde niet aan hun trekken. Ze vinden het te saai, het biedt geen uitdaging. In een heterogene klas ligt het gemiddelde niveau vaak lager dan vroeger in de eerste klassen op HBS en gymnasium het geval was. Als leerlingen extra goed zijn in wiskunde is het zeer waardevol dit verder te stimuleren. Op twaalfjarige leeftijd kun je kinderen al best selecteren op wiskundige begaafdheid, in tegenstelling tot wellicht andere vakken. De rol van de wiskundeleraar hierin is zeer belangrijk. In een geuniformeerde situatie zoals de basisvorming is, lijkt het niet mogelijk iets anders dan wiskunde uit het dagelijks leven aan te bieden. Lang niet alle leerlingen zullen geïnteresseerd zijn in zuivere wiskunde. Het is de taak van de leraar daar adequaat op in te spelen.
Een nieuw fenomeen in de tweede fase voortgezet onderwijs is het studiehuis. Het idee is dat leerlingen vrij weinig klassikaal onderwijs krijgen, en in plaats daarvan zelfstandig leerstof bestuderen of aan opdrachten werken. Hierbij is dan één of meer docenten aanwezig die bij problemen geraadpleegd kunnen worden. Wat betekent dit voor het vak wiskunde?
In mijn eigen onderwijspraktijk ben ik er altijd van uit gegaan dat voor een goed functioneren van het onderwijsproces de volgende elementen van belang zijn:
- *klassikaal onderwijs,*
- *zelfstandig werken onder begeleiding,*
- *eventueel opdrachten waar een leerling wat extra onderzoek moet doen,*
- *huiswerkopdrachten waar een leerling zonder verder onderzoek of begeleiding mee aan de slag kan gaan.*

In het studiehuis vind ik het zelfstandig werken en het eventueel nader onderzoek doen terug. Echter een situatie waarbij leerlingen geacht worden zelf te werken en er slechts een docent ter consultatie aanwezig is, lijkt mij zinloos. Ik heb groot bezwaar tegen een leraar die zich passief opstelt. Ook bij het zelfstandig werken door leerlingen dient de docent zelf actief aan het onderwijsproces deel te nemen. Hij activeert en stimuleert. En als het over het vak wiskunde gaat is begeleiding door een docent met een gedegen wiskundeopleiding een must. Er moet een degelijke vakinhoudelijke component zijn.

Ook nieuw zijn praktische opdrachten en profielwerkstuk.
Hier kan ik mij nog weinig bij voorstellen. Als leraar zou ik hier heel enthousiast over kunnen zijn, mits er collega's, ook van andere vakken, zijn waarmee ik dit kan opzettten. Bovendien moet er voldoende tijd zijn om één en ander goed te kunnen voorbereiden. Dit laatste zal zoals zo vaak wel weer een probleem opleveren. Als het lukt zal de communicatie tussen de verschillende vakken hierdoor zeker zowel voor de leerlingen als voor de leraren verbeteren.

Eén van de klachten van de universiteiten is dat de studenten geen enkele vaardigheid in het leveren van bewijzen hebben. Het programma voor wiskunde B bood daar ook vrijwel geen ruimte voor. In de nieuwe tweede fase wordt er in de wiskundeprogramma's voor de beide B-profielen wel expliciet aandacht besteed aan dit onderwerp. Is 'bewijzen' een reële optie voor het voortgezet onderwijs, en wat zou dat dan moeten inhouden?
Bewijzen is een zinvolle bezigheid voor alle leerlingen, mits het gaat over dingen die niet vanzelfsprekend zijn. De betekenis van deze bezigheid overstijgt de wiskunde, en kan ook op allerlei andere gebieden van nut zijn. Je moet leerlingen confronteren met bewijzen daar waar het zin heeft, en ze bijvoorbeeld niet lastig vallen met een bewijs dat de basishoeken van een gelijkbenige driehoek gelijk zijn. In het wiskundeonderwijs was er een traditie vanuit de Euclidische meetkunde. Opgaven waren van de vorm: gegeven, te bewijzen, bewijs. Een probleem in een dergelijke opzet is dat goede axioma-systemen, en dat geldt zowel voor de meetkunde als voor de algebra/analyse-stof in het voortgezet onderwijs, te gecompliceerd zijn, en dus in deze fase van het onderwijs onbruikbaar. Ik denk dat je je in het voorgezet onderwijs tevreden moet stellen met zogenaamde locale bewijzen, die je wellicht beter als redeneringen dan als bewijzen kunt typeren. Er moet dan wel sprake zijn van locale exactheid. Een voorbeeld. In iedere driehoek is een ingeschreven cirkel. Denk maar aan een cirkel die aan twee zijden van een driehoek raakt en helemaal binnen de cirkel ligt. Beschouw hem als een ballon die je op kan blazen terwijl hij binnen de driehoek blijft. Op een bepaald ogenblik raakt de ballon aan de derde zijde, en we hebben een ingeschreven cirkel. Hierbij gebruiken we een intuïtieve continuïteit. Een meer formeel bewijs kan natuurlijk ook gegeven worden. De verzameling van de punten binnen de driehoek die evenver van twee zijden liggen is dat deel van de hoekdeellijn dat binnen de driehoek ligt.

De betreffende stukken van de hoekdeellijnen vanuit twee hoekpunten hebben een punt gemeen. Een eenvoudige logische, meetkundige redenering laat zien dat dit punt evenver van de drie zijden van de driehoek af ligt, en dus het middelpunt van de ingeschreven cirkel is.
Wanneer we niet het aangegeven lijnstuk van de hoekdeellijn hadden genomen, maar de verzameling van punten die evenver van de twee zijden liggen hadden genomen, hadden we niet één middelpunt maar de vier middelpunten van de aangeschreven en ingeschreven cirkels gekregen.
Zonder daar verder op in te gaan gebruikten we bij dit bewijs ook continuïteit en ordening.
Bewijzen in de schoolwiskunde komt altijd neer op het opnieuw aantonen van door anderen gevonden resultaten. Veel formuleringen van opgaven geven dit duidelijk aan:
bewijs dat in een driehoek met zijden 13, 14 en 15 één van de hoogtelijnen gelijk is aan 12.
De leerling weet dus het antwoord al lang maar wordt toch gedwongen dit opnieuw aan te tonen. Een alternatieve formulering voor een dergelijk vraagstuk zou kunnen zijn:
onderzoek de lengtes van de hoogtelijnen in een driehoek met zijden 13, 14 en 15.
Het zoeken naar constructies en oplossingen heeft de voorkeur boven het geven van bewijzen van door anderen gevonden resultaten. Beperk het formele bewijzen tot die leerlingen die het zware B profiel kiezen.
Voor mijn gevoel zijn leerlingen gevoeliger voor vragen als 'Is dit altijd zo' dan voor opdrachten 'Bewijs dat dit altijd zo is'.

Al jarenlang is er een buitengewoon klein aantal vwo-ers dat wiskunde gaat studeren. Dit leidt tot tekorten op allerlei gebieden. Ook in het voortgezet onderwijs, in het bijzonder in het vwo komen er steeds minder docenten met een universitaire opleiding. Hoe zou je leerlingen die goed zijn in wiskunde kunnen stimuleren om wiskunde te gaan studeren?
Het aantal potentiële wiskundestudenten in 5 en 6 vwo is erg klein, mogelijk niet meer dan één of twee leerlingen per klas. Een leraar zou deze leerlingen extra kunnen stimuleren, maar kan zich aan de andere kant weer niet te veel op zo'n klein aantal richten. Beter zou het zijn om bijvoorbeeld regionaal groepjes van minimaal 10 leerlingen te vormen die bijvoorbeeld eens per maand op een zaterdagmorgen bijeenkomen onder leiding van een wiskundeleraar en iemand van een universiteit. Hier zouden ook natuurkundigen en/of informatici een rol kunnen spelen. Het materiaal voor dergelijke bijeenkomsten zou landelijk gecoördineerd moeten worden en zou bijvoorbeeld via Internet beschikbaar gesteld kunnen worden. Er zit voor de universiteiten het gevaar aan verbonden dat als dit soort activiteiten landelijk georganiseerd zou gaan worden men potentiële studenten aan een concurrent kwijt raakt.
Maar dat risico zou men dan maar op de koop toe moeten nemen. Ervaringen die er op dit gebied zijn (bijvoorbeeld masterclasses), worden nu niet landelijk gecoördineerd. Dergelijke activiteiten moeten wel een ander karakter hebben dan de Olympiade-activiteiten. Het moet niet alleen op probleemoplossen gericht zijn, er moet ook leerstof worden aangeboden. Activiteiten die in kaleidoscoop-achtige colleges op verschillende universiteiten worden aangeboden zouden als voorbeelden kunnen dienen.

Bram van Asch

Wiskunde Olympiade 1999 en 2000 [1])

Inleiding

Na jaren van gestage daling mag de Wiskunde Olympiade zich weer verheugen in een stijging in deelnemersaantallen en in het behaalde niveau bij de opgaven. Alhoewel veel docenten inmiddels de opgaven wel op het Web kunnen vinden (olympiads.win.tue.nl/nwo/opgaven/index.htm), krijgt de redactie van Euclides toch regelmatig het verzoek of met name de opgaven van de tweede ronde in Euclides geplaatst kunnen worden. Bij deze.

Eerste ronde 1999

Aan de eerste ronde van de 38e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1999 deden 2283 leerlingen van 190 scholen mee. De school met de hoogste resultaten van de beste vijf deelnemers heeft de door Shell ter beschikking gestelde wisselprijs gewonnen. Dat was in 1999 het **Ommelander College** in Appingedam.

Tweede ronde 1999

De tweede ronde van de Wiskunde Olympiade 1999 is gespeeld op vrijdag 10 september 1999. De tweede ronde bestaat uit 5 opgaven met eik een maximale score van 10 punten. Daarvoor is drie uur beschikbaar. Bij een gelijke score in de tweede ronde bepaalt het aantal punten uit de eerste ronde de einduitslag.
De opgaven van die tweede ronde zijn opgenomen in dit nummer van Euclides[2]).



De tien prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1999 zijn:

	Punten uit ronde	*1e*	*2e*
Allard Veldman	Velsen-Zuid	32	46
Vincent Groenhuis	Enschede	26	42
Maarten Löffler	Wageningen	36	39
Jan Tuitman	Uithuizen	36	39
Jules van Kempen	Duiven	24	36
Peter Bruin	Boskoop	32	33
Jeroen van Wolffelaar	Nistelrode	32	33
Youri de Boer	Koudekerk a/d Rijn	26	32
Reinier Heeres	Heemskerk	20	32
Siebren Reker	Groningen	21	32

Eerste ronde 2000

De eerste ronde van de 39e Nederlandse Wiskunde Olympiade is gespeeld op vrijdag 21 januari 2000. Dit jaar is het niemand gelukt om de maximale score te behalen.
Aan deze eerste ronde hebben 2350 leerlingen van 222 scholen meegedaan. Ten opzichte van 1999 betekent dat een stijging: met 32 scholen en 67 leerlingen. De school met de hoogste resultaten van de beste vijf deelnemers heeft de door Shell ter beschikking gestelde wisselprijs gewonnen. Dat is dit jaar het **Elzendaal College** in Boxmeer met een score van 81 punten (van de maximaal te behalen 110). De organiserend docent op het Elzendaal College is collega H. Alink.

De deelnemende leerlingen waren als volgt verdeeld over de verschillende klassen en schoolsoorten (de getallen tussen haakjes zijn de aantallen deelnemers in 1999, resp. 1998):

5-vwo	1188	(1062 en 1246)
5-havo	72	(15 en 29)
4-vwo	732	(752 en 675)
4-havo	92	(190 en 155)
klas 1,2,3	266	(264 en 260)

De dalende trend in de deelnamecijfers van de afgelopen jaren is daarmee gelukkig tot staan gekomen.

Leerlingen die een score hebben behaald van 14 punten of meer zullen worden uitgenodigd voor de tweede ronde. Van de 119 leerlingen die dat betreft, komen er 80 uit 5-vwo, 34 uit 4-vwo, 1 uit 4-havo en 4 uit een eerste, tweede of derde klas. De tweede ronde zal worden gespeeld op vrijdag 15 september 2000.

De gemiddelde score dit jaar bedraagt 5,65 van de 22 maximaal, ofwel 26%. In 1999 was de gemiddelde score 8,9 van maximaal 36, ofwel 25%. In 1998 en 1997 bedroegen die percentages respectievelijk 28% en 36%. Ook aan die gestage daling van de afgelopen jaren is dus gelukkig een eind gekomen.

1 Met dank aan Fred Bosman (Cito), secretaris van de Wiskunde Olympiade, voor het aanleveren van de gegevens.

2 Digitale versies van de opgaven en oplossingen zijn te vinden op:
olympiads.win.tue.nl/nwo/opgaven/opg99.htm
olympiads.win.tue.nl/nwo/opgaven/opl99.htm
Met dank aan Heleen Neggers voor de uitwerkingen.

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1999

Opgaven van de tweede ronde 10 september 1999

Opgave 1

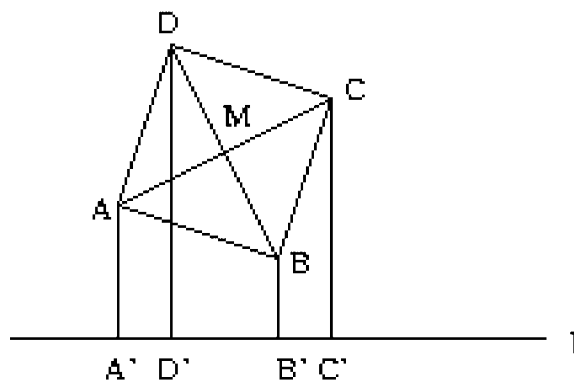
Een functie f heeft de volgende twee eigenschappen:
$f(n) = 1$ of $f(n) = -1$ voor elk geheel getal n,
$f(m \times n) = f(m) \times f(n)$ voor alle gehele getallen m en n.
Laat zien dat er een getal a bestaat, $1 \leq a \leq 12$, met $f(a) = 1$ en $f(a+1) = 1$.

Opgave 2

Van een vierkant bestaande uit 81 eenheidsvierkanten worden sommige vierkanten zwart gekleurd en andere vierkanten wit en wel zó, dat van elke rechthoek die uit 6 eenheidsvierkanten bestaat van de vorm 2×3 of 3×2 er twee vierkanten zwart zijn en vier wit.
Hoeveel zwarte vierkanten bevat het gehele vierkant? Beredeneer dat er geen enkel ander antwoord mogelijk is.

Opgave 3

Gegeven zijn een vierkant $ABCD$ en een lijn l. Het punt M is het snijpunt van de diagonalen van het vierkant. De lengte van elk van de diagonalen van het vierkant is 2 en de afstand van M tot de lijn l is groter dan 1. De hoekpunten A, B, C, D worden op l geprojecteerd. De projecties zijn respectievelijk A', B', C', D'. Het vierkant wordt gedraaid om M, waarbij de punten A, B, C, D meedraaien en hun projecties A', B', C', D' op l meebewegen.



Bewijs dat de waarde van $A'A^2 + B'B^2 + C'C^2 + D'D^2$ tijdens het draaien niet verandert.

Opgave 4

Een 8×8-matrix is een getallenschema met 64 getallen ingedeeld in 8 horizontale rijen en 8 verticale kolommen.
De getallen in de matrix mogen gewijzigd worden volgens de volgende twee spelregels:
- Alle getallen in een rij worden verdubbeld.
- Alle getallen in een kolom worden met 1 verminderd.

Bewijs dat elke 8×8-matrix die alleen gehele getallen groter dan 0 bevat met bovenstaande spelregels te veranderen is in een matrix die alleen nullen bevat.

Opgave 5

Bij een niet-negatief geheel getal c wordt de rij a_1, a_2, a_3, … gedefinieerd door: $a_n = n^2 + c$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

Bij deze rij a_1, a_2, a_3, … definiëren we een rij d_1, d_2, d_3, … door: d_n is de grootste gemeenschappelijke deler van a_n en a_{n+1}.

Voorbeeld met $c = 2$:

$a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 11, a_4 = 18, a_5 = 27, a_6 = 38, a_7 = 51, \ldots$

$d_1 = 3, d_2 = 1, d_3 = 1, d_4 = 9, d_5 = 1, d_6 = 1, \ldots$

a Neem $c = 0$ en laat zien dat $d_n = 1$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

b Neem $c = 1$ en laat zien dat $d_n = 1$ of $d_n = 5$ voor $n = 1, 2, 3, \ldots$

c Algemeen: laat zien dat bij elke c de grootste waarde die voorkomt in de rij d_1, d_2, d_3, … gelijk is aan $4c + 1$.

Nederlandse Wiskunde Olympiade 1999

Oplossingen van de tweede ronde 10 september 1999

Opgave 1

$f(0) = f(0 \times n) = f(0) \times f(n)$ voor alle gehele n

$f(n) = f(0) : f(0) = 1$ voor alle gehele n

Elke a groter of gelijk aan 1 en kleiner of gelijk aan 12 heeft dus de gevraagde eigenschap.

Een andere oplossing is deze:

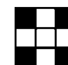
$f(1) = f(1 \times 1) = f(1) \times f(1) = (f(1))^2 = 1$. Verder geldt $f(4) = (f(2))^2 = 1$ en ook $f(9) = (f(3))^2 = 1$. Als $f(2) = 1$, dan zijn we klaar want dan voldoet $a = 1$. Dus veronderstel $f(2) = -1$. Als $f(3) = 1$ of $f(5) = 1$ dan zijn we klaar vanwege $f(4) = 1$. Veronderstel $f(3) = f(5) = -1$. Maar dan geldt $f(10) = f(2) \times f(5) = 1$ en zijn we klaar omdat $f(9) = 1$ en $a = 9$ voldoet.

Opgave 2

Elk 3×1-rechthoekje is als kolom bevat in een 3×3-vierkant, waarvan we de rijen 1, 2 en 3 noemen en de kolommen A, B en C. Als de twee zwarte vierkantjes van de rechthoek A1-B3 (bestaande uit A1, B1, A2, B2, A3, B3) beide in kolom B zouden liggen, dan zou de kolom A geheel wit zijn; maar van rechthoek B1-C3 zou dan ook de kolom C geheel wit zijn. De twee zwarte vierkantjes van zowel rechthoek A1-C2 als van rechthoek A2-C3 zouden dan in kolom B liggen, dus zouden B1, B2 en B3 alle drie zwart moeten zijn, en zou rechthoek A1-B3 drie zwarte vierkantjes moeten bevatten. Omdat dat niet kan, kan kolom B hooguit 1 zwart vierkantje bevatten.

Er zijn nu twee mogelijkheden:

I Kolom B bevat geen zwarte vierkantjes. Omdat A1-B3 2 zwarte vierkantjes bevat, bevat kolom A nu 2 zwarte vierkantjes; en kolom C ook. Het 3×3-vierkant moet er dan zo uitzien:

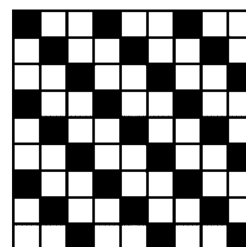


II Kolom B bevat 1 zwart vierkantje. Omdat A1-B3 2 zwarte vierkantjes bevat, bevat kolom A nu ook precies 1 zwart vierkantje; en kolom C ook. Met een soortgelijke redenering bevatten de rijen 1, 2 en 3 elk ook precies 1 zwart vierkantje.

Stel dat in het grote 9×9-vierkant een 3×3-vierkant van het type I voorkomt en noem dit A1-C3. Dit vierkant grenst aan een ander 3×3-vierkant van type I of II, zeg dat dit vierkant rechts van A1-C3 ligt en noem het D1-F3. Kolom C bevat 2 zwarte vierkantjes en kolom D 1 of 2, dus C1-D3 bevat nu meer dan 2 zwarte vierkantjes. Dit kan niet dus komen 3×3-vierkanten van het type I niet voor.

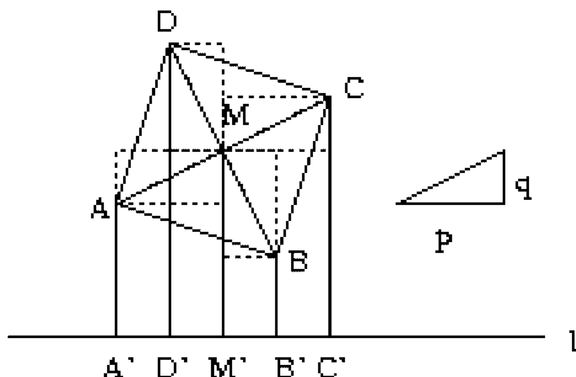
Het hele 9×9-vierkant kunnen we bedekken met negen 3×3-vierkanten van type II die elk 3 zwarte vierkantjes bevatten. In totaal moeten er dus 27 (= 81 : 3) zwarte vierkantjes zijn.

Ten slotte zie je een voorbeeld van zo'n kleuring in de figuur, waarin elk horizontaal en elk verticaal rijtje van drie vierkantjes precies 1 zwart vierkantje bevat.



Opgave 3

M' is de projectie van *M* op de lijn *l*. Projecteer *A*, *B*, *C* en *D* op de lijn *MM'*.
MA, *MB*, *MC* en *MD* zijn dan de schuine zijden van identieke rechthoekige driehoekjes. De rechthoekszijden van deze driehoekjes zijn evenwijdig aan *l* of *MM'*.



Noem de lengtes van de rechthoekszijden p en q zoals in de figuur. Er geldt nu:
$(AA' + CC')^2 = (2MM')^2$
$(BB' + DD')^2 = (2MM')^2$
$(AA' - CC')^2 = (2q)^2$
$(BB' - DD')^2 = (2p)^2$
optellen geeft:
$2AA'^2 + 2BB'^2 + 2CC'^2 + 2DD'^2 = 2MM'^2 + 4p^2 + 4q^2$
en met $p^2 + q^2 = AM^2$ (= 1) geldt dat:
$AA'^2 + BB'^2 + CC'^2 + DD'^2 = 4MM'^2 + 2AM^2$ en deze waarde is onafhankelijk van de stand van het vierkant.

Opgave 4

Noem de matrix A met elementen a_{ij}.
Beschouw kolom j. Als alle elementen a_{ij} gelijk zijn aan 1, maken we ze 0 door kolom j met 1 te verminderen.
Als niet alle elementen gelijk zijn aan 1, definieer dan k_j als het aantal elementen in kolom j dat gelijk is aan 1 en m_j als het kleinste element groter dan 1 in de kolom.
Verdubbel de rijen i waarin wel $a_{ij} = 1$ en verminder ervolgens alle getallen in kolom j met 1. Er geldt nu k_j is groter dan voorheen of k_j is gelijk gebleven en m_j is kleiner dan voorheen.
Herhaal deze stap totdat $k_j = 8$. (Doordat bij elke stap k_j toeneemt of m_j afneemt en deze waarden respectievelijk 8 en 2 zijn weten we dat dit proces eindigt.)
Het bovenstaande proces herhalen we voor iedere kolom. Op de kolommen die al gelijk zijn aan 0 heeft rijverdubbeling geen effect meer. Uiteindelijk hebben we dus een matrix die alleen nullen bevat.

Opgave 5

a Bij $c = 0$ hoort de rij 1, 4, 9, 16, … Twee opeenvolgende getallen in de rij zijn algemeen n^2 en $(n + 1)^2$. Omdat n en $n + 1$ maar 1 schelen kunnen ze niet allebei een veelvoud zijn van hetzelfde getal groter dan 1. Dus is de ggd (grootste gemene deler) van n en $n + 1$ gelijk aan 1. Maar elke priemfactor van n^2 is ook een priemfactor van n. Dat geldt ook voor $(n + 1)^2$. Dus is de ggd van n^2 en $(n + 1)^2$ ook gelijk aan 1.

b Als $n^2 + 1$ een veelvoud is van d en $(n + 1)^2 + 1$ is ook een veelvoud van d, dan is hun verschil ook een veelvoud van d. Dus de ggd van $n^2 + 1$ en $(n + 1)^2 + 1$ is ook een deler van $n^2 + 1$ en $2n + 1$ $(= (n + 1)^2 + 1 - (n^2 + 1))$.
Een deler van $n^2 + 1$ en $2n + 1$ is ook weer een deler van $2n + 1$ en $n(n - 2)$ want $n^2 + 1 - (2n + 1) = n^2 - 2n$. Blijft over de vraag: wat zijn de delers van $n(n - 2)$ en $2n + 1$?
Een priemfactor van $n(n - 2)$ is een priemfactor van n of van $n - 2$. Een priemfactor van n en $2n + 1$ is ook een priemfactor van n en $n + 1$ $(= 2n + 1 - n)$ en kan dus weer alleen maar 1 zijn. Een priemfactor van $n - 2$ en $2n + 1$ is ook een priemfactor van $n - 2$ en $n + 3$ $(= 2n + 1 - (n - 2))$. Omdat het verschil van deze twee getallen 5 is zijn de enige mogelijkheden 1 en 5. Een priemfactor van $n^2 + 1$ en $(n + 1)^2 + 1$ kan dus 1 of 5 zijn en dat geldt daarmee ook voor de ggd.
Bij $c = 1$ hoort de rij 2, 5, 10, 17, … en je ziet dat $d_1 = 1$ en $d_2 = 5$.

c De ggd van $n^2 + c$ en $(n + 1)^2 + c$ is ook een deler van $n^2 + c$ en $2n + 1$ $(= (n + 1)^2 + c - (n^2 + c))$ en dus ook van $2n + 1$ en $n^2 - 2cn$ $(= n^2 + c - c \times (2n + 1))$.
Een priemfactor van $n(n - 2c)$ is een priemfactor van n of van $n - 2c$. Een priemfactor van n en $2n + 1$ is ook een priemfactor van n en $n + 1$ $(= 2n + 1 - n)$ en kan dus weer alleen maar 1 zijn. Een priemfactor van $n - 2c$ en $2n + 1$ is ook een priemfactor van $n - 2c$ en $n + 2c + 1$ $(= 2n + 1 - (n - 2c))$.
Omdat het verschil van deze twee getallen $4c + 1$ is zijn de enige mogelijke priemfactoren delers van $4c + 1$. De grootste deler die dus voor kan komen als deler van $n - 2c$ en $n + 2c + 1$ en dus van $n^2 + c$ en $(n + 1)^2 + c$ is $4c + 1$.
Neem $n = 2c$, dan is $a_n = 4c^2 + c = c(4c + 1)$ en $a_{n+1} = 4c^2 + 4c + 1 + c = (c + 1)(4c + 1)$, dus de deler $4c + 1$ komt voor. De maximale waarde die voorkomt in de rij $d_1, d_2, d_3, \ldots$ is gelijk aan $4c + 1$.

Verenigingsnieuws

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

Jaarvergadering Lustrumcongres 2000

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Het thema van dit congres is:

Wiskundeonderwijs over de grens

Met drie subthema's:

wiskundeonderwijs over de **lands**grenzen
wiskundeonderwijs over de **vak**grenzen
wiskundeonderwijs over de **tijd**sgrenzen

Dit congres vindt plaats op:
vrijdag 17 november vanaf 15.30 uur tot en met **zaterdag 18 november** 16.00 uur.

In Euclides 75-7 vindt u de tweede aankondiging van dit lustrumcongres.
Het volgende nummer van Euclides, 76-0, is een speciaal nummer dat vrijwel geheel gewijd zal zijn aan dit Lustrumcongres, aan het bijbehorende Jubileumboek "100 jaar wiskundeonderwijs" en aan het project De Nationale Doorsnee op 10 oktober 2000.
Dit nummer zal rond 20 augustus verschijnen. Tevens wordt daarin de nieuwe vormgeving van Euclides gepresenteerd.
Maak uw collega's nog even lid, zodat ze dit lustrumnummer niet missen.

Vooraankondiging jaarvergadering 2000

Op het lustrumcongres zal ook de jaarvergadering 2000 plaatsvinden. De definitieve agenda zal in het nulnummer staan.

Voorlopige agenda

1 Opening door de voorzitter mevr.drs. M. Kollenveld
2 Notulen van de jaarvergadering 1999 (zie Euclides 76-1)
3 Jaarverslagen (zie Euclides 76-1)
4 Decharge van de penningmeester, vaststelling van de contributie 2000-2001 en benoeming van de nieuwe kascommissie. Het bestuur stelt kandidaat dhr. C. Garst en dhr. F.J. Appelman
5 Bestuursverkiezing in verband met periodiek aftreden van dhr. drs. S. Garst, mevr. drs. M. Kollenveld, dhr. W. Kuipers. Deze kandidaten stellen zich herkiesbaar en het bestuur stelt hen opnieuw kandidaat. Tevens treedt af en is niet meer herkiesbaar mevr. A. Aukema. Het bestuur hoopt u zo spoedig mogelijk een kandidaat te kunnen voorstellen.*
6 Bestuursoverdracht
7 Rondvraag
Aan leden die een vraag in de rondvraag willen stellen wordt verzocht deze op een nader aan te geven tijdstip schriftelijk in te dienen bij de voorzitter.
8 Sluiting door de voorzitter

* Tot achtentwintig dagen na het verschijnen van deze oproep kunnen leden van de vereniging door ten minste vijf leden schriftelijk worden voorgedragen bij het bestuur.

ZEBRA-reeks







In de Zebra-reeks zijn tot nu toe verschenen:

deel 1:

Kattenaids en Statistiek

deel 2:

Perspectief, hoe moet je dat zien?

deel 3:

Schatten, hoe doe je dat?

Beschrijvingen van deze deeltjes vindt u in Euclides 74-8, p. 274; 75-1, p. 20 en 75-6, p. 203.

Nog gepland voor dit jaar zijn:

deel 4:

De Gulden Snede

deel 5:

Iteratie en chaos

Prijzen:
Schoolabonnement: 6 exemplaren van 5 delen voor *ƒ* 400,–
Individueel abonnement voor leden: *ƒ* 75,–
Losse boekjes voor leden: *ƒ* 16,50.
Deze bedragen zijn inclusief verzendkosten. Bestellen kan door het juiste bedrag over te maken op Postbank nummer 5660167 t.n.v. Epsilon Uitgaven te Utrecht onder vermelding van Zebra (1 t/m 5).

Zelf ophalen kan in de losse verkoop: ledenprijs op bijeenkomsten *ƒ* 12,50; in de betere boekhandel *ƒ* 14,75.

De ZEBRA-reeks is een initiatief van de NVvW, en wordt uitgegeven in samenwerking met Epsilon Uitgaven. Met de aanschaf van een boekje steunt u dus ook de (uw) vereniging.

Het feest der herkenning en Bottema's 'Hoofdstukken'

Agnes Verweij

Drie jaar geleden verscheen een nieuwe druk van 'Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde' van prof. dr. O. Bottema. Deze en de vorige uitgaven van dit boekje worden besproken tegen de achtergrond van leermateriaal voor het onderdeel Voortgezette Meetkunde van wiskunde B2 op het vwo.



Feest der herkenning

Een van de bewijsmethoden uit de Profi-bundel 'Denken in cirkels en lijnen' heeft de uitnodigende naam 'Feest der herkenning' gekregen. De introductie op deze methode luidt: "Stel je voor: je loopt over een plein in Budapest en daar zit een jongen achter een rijtje voor een deel gevulde flessen water. Hij ragt erop met twee lepels. Het duurt even, maar dan herken je het: *Yesterday* van The Beatles. Dit is het feest der herkenning." Een aansprekend begin voor wie - net als ik - tot de generatie van de auteurs van dit pakketje behoort. Voor deze generatie was het feest der herkenning trouwens al begonnen in de aan 'Denken in cirkels en lijnen' voorafgaande bundel van Profi over Voortgezette meetkunde, 'Afstanden, grenzen en gebieden', waar stellingen over omgeschreven cirkels, koordenvierhoeken, omtrekshoeken en enkele bekende toepassingen hiervan behandeld worden. Voordat de Mammoetwet ingevoerd werd, was dit standaardstof voor de derde klassen van middelbare scholen. Al dit moois, uitgebreid met stellingen over in- en aangeschreven cirkels, binnen- en buitenomtrekshoeken en de macht van een punt ten opzichte van een cirkel en machtlijnen, hebben wiskundedocenten die met The Beatles opgegroeid zijn dus al jong geleerd. En sommigen hebben het ook nog een aantal jaren in de onderbouw van hbs en gymnasium onderwezen.
In de herziene versie van 'Denken in cirkels en lijnen', nu in twee delen, is aan het eind een hoofdstuk dat "bestaat uit een forse serie problemen" toegevoegd. Het feest gaat nog even door, al wordt in de inleiding wel gesuggereerd dat dit niet voor iedereen weggelegd zal zijn. De hier aangeboden problemen gaan veel verder dan wat vroeger op de hbs en het gymnasium behandeld werd. Toch zullen wiskundedocenten van toen veel van deze problemen herkennen: de punten van Brocard en hun isogonale verwantschap, een veralgemenisering van de stelling van Fermat en het (bij Profi naamloze) punt van Torricelli, de voetpuntsdriehoeken van isogonaal verwante punten (die in dit verband bij Profi "bevriende punten" genoemd worden), de negenpuntscirkel van Feuerbach, de rechte van Euler en de rechte van Wallace. Hetzelfde geldt voor de cirkels van Apollonius, die in het volgende Profi-pakket, 'Conflictlijnen en Spiegels', zowel analytisch als meetkundig behandeld worden. Deze hoogtepunten van de vlakke meetkunde zijn alle te vinden in het boekje 'Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde' van prof. dr. O. Bottema, dat destijds met de boeken van Molenbroek en Wijdenes als achtergrondliteratuur fungeerde voor wie vlakke meetkunde onderwees.

De eerste uitgave van Bottema's 'Hoofdstukken'

Het boekje van Bottema verscheen voor het eerst in 1944. De 103 pagina's tellende uitgave, slechts 12.5 cm breed en 17.2 cm hoog, was nummer 40 in de 'Afdeeling Wiskunde' van de reeks 'Servire's Encyclopaedie in Monographieën'. De reeks beoogde "enerzijds de ontwikkelde leek tot systematische bestudering in staat te stellen, anderzijds de vakman gelegenheid te bieden zich te oriënteren over de stand der wetenschap in verwante gebieden". Van mijn exemplaar met de eenvoudige hard kartonnen omslag is het linnen ruggetje weggesleten, het goedkope oorlogspapier van het binnenwerk is verkleurd, maar het bindwerk is nog goed en de oranje letters op de beige/lichtgroene kaft zien er nog fris uit.

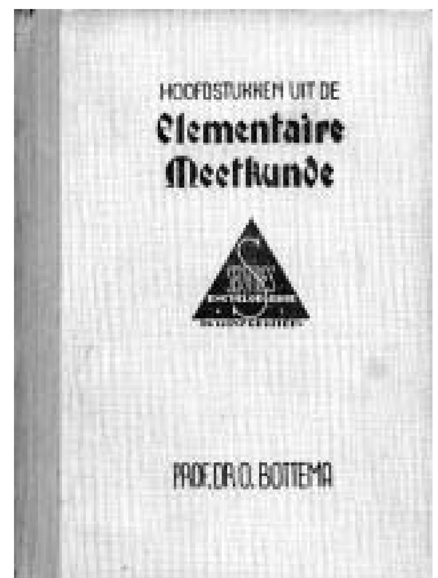
Zowel aan de inhoud als aan de verzorging van de tekst en de figuren is duidelijk met veel aandacht en plezier gewerkt. In Bottema's voorwoord bij de tweede druk van het boekje lezen we hierover: "Het werd geschreven tijdens de beklemmende werkelijkheid van bezetting, duisternis en verdriet. Het betekende voor de schrijver dat hij zich mocht toestaan in een beperkt aantal uitgespaarde uren de zorgen destijds te verwisselen voor de vreugde die gegeven wordt door fraaie meetkundige figuren en door een opeenvolging van syllogismen ("hieruit volgt"; "dus";"derhalve") bekroond met een voldaan *quod erat demonstrandum*". Voordat de 'ontwikkelde leek' in de 'Hoofdstukken' toekomt aan zo'n bekroning, die hierin overigens geen enkele maal met deze woorden of hun afkorting is aangeduid, valt er nog wel enig denkwerk te verrichten. Bottema's syllogismen volgen elkaar soms wel érg snel op.

De tweede, vermeerderde, druk

De tweede, vermeerderde, druk van het boekje van de 'Hoofdstukken' verscheen ruim veertig jaar later, in 1987, met steun van het Wiskundig Genootschap als Epsilon Uitgave nummer 9.
De vermeerdering bestond vooral hieruit dat aan de oorspronkelijke 17 hoofdstukken nog 10 hoofdstukken met resultaten van recenter datum werden toegevoegd.
De herziening waarvan volgens het voorwoord ook sprake was, betreft de uiterlijke verschijning. De paginaoppervlakte is verdubbeld, de lichtblauwe slappe kaft glanst, de belettering van de omslag is gemoderniseerd, het papier is van betere kwaliteit, sommige figuren zijn iets duidelijker geworden en de spelling is aan de nieuwe regels aangepast. Daarbij is de karakteristieke stijl van het eerste boekje van Bottema met de soms lange zinnen en vele bijzinnen bewaard gebleven. Paragraaf 7 van hoofdstuk 1 bestaat bijvoorbeeld uit één zin, die 10 regels beslaat en 10 komma's bevat. De nieuwe lay-out en vooral de nieuwe typografie van het binnenwerk zijn helaas van beduidend mindere kwaliteit dan de oude. Alle sub- en superscripts zijn storend te groot, woorden zijn nogal eens onnodig (midden in een regel) afgebroken en er zijn betrekkelijk willekeurig door de tekst heen te veel of juist te weinig spaties gebruikt. Buitengewoon hinderlijk zijn de vele zetfouten die de inhoud van de tekst en formules aantasten, zetfouten die in de oorspronkelijke uitgave niet voorkomen.
Op de achterzijde van de omslag wordt gesteld dat de nieuwe uitgave verscheen in een tijd waarin de belangstelling voor de meetkunde weer sterk toenam. Dit mag in z'n algemeenheid juist geweest zijn, van een groeiende belangstelling voor de door Bottema besproken vlakke meetkunde was onder de wiskundeleraren van het voortgezet onderwijs in elk geval *geen* sprake. De vlakke meetkunde van het havo en vwo bestond sinds de invoering van de Mammoetwet uit, in de onderbouw te behandelen, 2-dimensionale transformatiemeetkunde en vectormeetkunde die beide in de praktijk al snel gereduceerd werden tot dat wat nodig was als voorbereiding op de ruimtemeetkunde van de bovenbouw. En nodig was beslist *niet* de kennis van bijzondere stellingen over driehoeken en bijbehorende cirkels en/of de vaardigheid in het bewijzen van dit soort stellingen. Daaraan zou de herverkaveling van wiskunde I en II tot wiskunde A en B op het vwo, die in 1987 juist z'n beslag had gekregen, geen verandering brengen. Dat de uitgever op de achterflap aangaf dat deze nieuwe uitgave bedoeld was voor "algemene wiskundige ontwikkeling" zonder daarbij (aanstaande) wiskundeleraren als doelgroep te noemen, zal dan ook geen toeval geweest zijn.

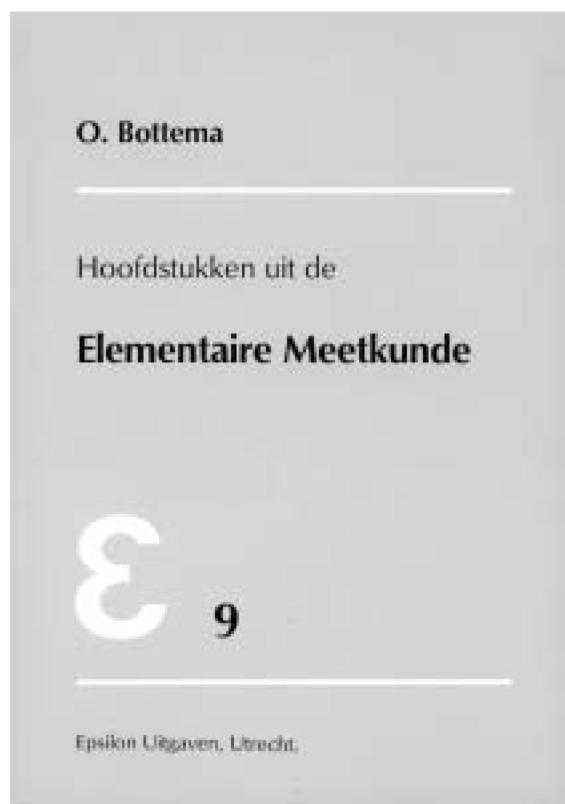
De derde druk van de 'Hoofdstukken'

In 1997, tien jaar na de tweede druk en vijf jaar na het overlijden van prof. Bottema, verscheen de derde druk van 'Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde', weer als Epsilon Uitgave nummer 9, maar nu "gecorrigeerd en opnieuw gezet naar de 2e druk" en voorzien van een Appendix.
Over deze uitgave, met een formaat dat tussen de formaten van de vorige drukken in ligt, valt weinig anders dan goeds te vertellen. De omslag is verfraaid: mooiere opnamen van hetzelfde beeldje van een klassieke wiskundige waarvan in het binnenwerk van de tweede druk



een foto was afgedrukt, sieren de voor- en de achterzijde van de licht- en donkerbruine mooi beletterde glanzende kaft. Helaas is er niet aan gedacht de vermelding dat het om een afbeelding van Pythagoras gaat en dat dit beeldje in een portaal van de kathedraal van Chartres te vinden is, uit de tweede

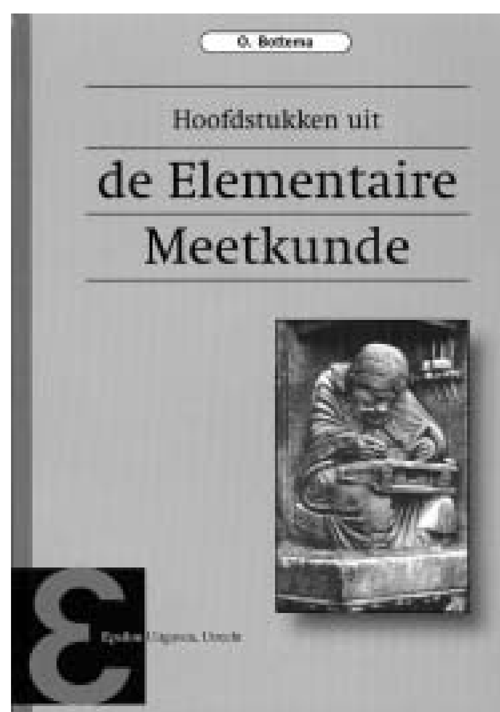
druk over te nemen. De heldere lay-out en typografie van het binnenwerk maken het boekje prettig leesbaar, de figuren die alle opnieuw - nu met de computer - gemaakt zijn door dr. K.P. Hart (TU Delft) zijn duidelijk, het door hem uitgebreide register maakt het opzoeken gemakkelijk. En het belangrijkste: de tekst is door prof. dr. J.M. Aarts (TU Delft) met heel veel zorg gecorrigeerd en in de Appendix van de meest noodzakelijke toelichting of aanwijzingen voorzien. Slechts enkele foutjes heeft hij over het hoofd gezien, en af en toe zoek je toch nog tevergeefs naar hulp in de Appendix. Zo valt het bijvoorbeeld niet mee zelf te "bedenken dat drie positieve getallen u, v en w alleen dan de zijden zijn van een driehoek als $-u^4-v^4-w^4+2v^2w^2+2w^2u^2+2u^2v^2\geq 0$". De aanwijzing 'ontbind het linkerlid in factoren' (wat heel goed gaat met een computeralgebrapakket, bijvoorbeeld Derive!), zou hier een prettig duwtje in de



rug geweest zijn. Maar verder is deze uitgave voor de 'ontwikkelde leek' bepaald een feest.
Gebleven is de veel te optimistische inschatting van het ingangsniveau door de uitgever. Op de achterflap van de vorige druk stond: "HAVO-VWO met wiskunde", en nu: "hoogste klassen VWO, HAVO en middelbaar beroepsonderwijs". Van de leerlingen uit deze klassen kunnen echter alleen zij die de Voortgezette meetkunde van wiskunde B2 uit het vwo-profiel Natuur en Techniek volgen of gevolgd hebben, misschien iets aan dit boekje hebben en dan nog alleen aan de oudere hoofdstukken. De bewijzen in de later toegevoegde hoofdstukken zullen zij te moeilijk vinden door de ingewikkelde formulemanipulatie die erin voorkomt, waarbij ook nogal eens gebruik gemaakt wordt van determinanten. Het zijn dan ook niet zozeer de leerlingen, maar vooral de docenten die met de Voortgezette meetkunde van het vwo te maken hebben of te maken krijgen, aan wie ik de aanschaf van de nieuwste uitgave van Bottema's boekje van harte kan aanbevelen.

De 'Hoofdstukken' en de schoolboeken

Behalve in het Profi-materiaal, zijn hoogtepunten uit de oudere hoofdstukken van Bottema's boekje ook in de in dit cursusjaar verschenen schoolboeken voor Voortgezette meetkunde te vinden. Hierin worden de bewijzen van de betreffende stellingen veelal op de voor leerlingen vertrouwde manier aan de hand van opgaven met de nodige sturende vragen en vraagjes zelf 'gevonden'. Deze aanpak en het gebruik van het computerprogramma Cabri, waarmee sommige stellingen eerst op een leuke manier zelf 'ontdekt' kunnen worden, maken de hoogtepunten van de vlakke meetkunde in het moderne leermateriaal voor leerlingen toegankelijker dan in het boekje van Bottema.



De keuze die de auteurs van het Profi-materiaal uit de door Bottema besproken onderwerpen hebben gemaakt, is hierboven al weergegeven. Twee van de gekozen onderwerpen zien we terug in elk van de drie meest gebruikte schoolboeken voor Voortgezette meetkunde. Dat zijn: de cirkels van Apollonius (in Moderne wiskunde zonder naam) en de rechte van Wallace of Simson. De methode Netwerk besteedt de minste aandacht aan hoogtepunten

uit de ‘Hoofdstukken’: behalve aan de genoemde twee alleen nog aan de stelling van Pythagoras, die hier op een andere manier bewezen wordt dan bij Bottema.
In de Voortgezette meetkunde van Moderne wiskunde worden de drie hoogtepunten uit Netwerk ook behandeld, maar hier wordt de stelling van Pythagoras, net als in Bottema’s Hoofdstuk 1, op vier manieren bewezen. Twee van deze bewijzen behoren tot de selectie van Bottema, waaronder het bewijs uit de Elementen van Euclides. Verder geeft Moderne wiskunde nog opgaven over de volgende onderwerpen uit de ‘Hoofdstukken’: het punt van Torricelli (twee maal) en het probleem van Fermat (zonder naam), de negenpuntscirkel, de rechte van Euler (ook twee maal), het probleem van Fagnano (dat bij Bottema geen naam heeft gekregen) en de stelling van Steiner-Lehmus.
In het deel van Getal & Ruimte over Voortgezette meetkunde wordt niet de stelling van Pythagoras, maar wel de omgekeerde hiervan bewezen. Net als in Moderne wiskunde wordt, behalve aan de cirkels van Apollonius, in opgaven aandacht besteed aan het punt van Torricelli en het probleem van Fermat. Verder worden opgaven gemaakt over andere onderwerpen uit de ‘Hoofdstukken’: de stelling van Menelaus, de stelling van Ceva, de omgekeerde van de stelling van Ceva met toepassingen, waaronder het punt van Gergonne en het punt van Nagel, en de punten van Brocard (anders dan bij Profi zonder de isogonale verwantschap). De rechte van Wallace-Simson (hier foutief de rechte van Wallis-Simson genoemd) wordt als mogelijk onderwerp voor een praktisch opdracht genoemd, net als de stelling van Pascal, de stelling van Pappos, de stelling van Desargues, de rechte van Euler en de cirkel van Feuerbach.
Voor zo’n praktische opdracht kunnen de leerlingen dan het exemplaar van Bottema’s boekje uit de boekenkast van hun leraar of uit de schoolbibliotheek raadplegen. Maar zoeken op Internet kan natuurlijk ook en dat zullen zij waarschijnlijk aantrekkelijker vinden.

De hoogtepunten in de praktijk

De vraag is echter of veel leerlingen in de praktijk aan de hoogtepunten uit de ‘Hoofdstukken’ van Bottema zullen toekomen. Het Profi-team was daar, gezien de introductie op de problemen aan het eind van ‘Denken in cirkels en lijnen’, al niet erg optimistisch over. Het zal inderdaad al moeilijk genoeg zijn in de weinige contacturen die op de meeste scholen voor Voortgezette meetkunde beschikbaar zijn, de leerlingen eenvoudige bewijzen te leren geven. En daarbij kunnen beter ook eenvoudige oefeningen gemaakt worden. De keuze van de auteurs van Netwerk voor een beperkt aantal hoogtepunten is daarom begrijpelijk.
Maar of nu voor Voortgezette meetkunde een boek gebruikt wordt met weinig of een boek met veel opgaven over mooie stellingen met moeilijke bewijzen, het kan heel inspirerend en leerzaam zijn als een enthousiaste leraar zo nu en dan eens een hoogtepunt van de vlakke meetkunde klassikaal behandelt. (Wie zegt dat dat niet mág in de nieuwe tweede fase?) Als ik die leraar was, zou ik er daarbij rond voor uitkomen dat ik die bewijzen niet zelf bedacht heb maar er de ‘Hoofdstukken’ van Bottema op nageslagen heb, net als de auteurs van de schoolboeken voor het bedenken van tussenvragen en hints hebben gedaan.

Besproken boek:

- *O. Bottema*
  Hoofdstukken uit de Elementaire Meetkunde, met een Appendix door J.M. Aarts
  gecorrigeerd en opnieuw gezet naar de 2e druk.
  Utrecht: Epsilon Uitgaven, 1997.
  Omvang: 136 pagina’s, prijs: ƒ 29,50.

En verder:

- *Aad Goddijn en Wolfgang Reuter*
  Denken in cirkels en lijnen
  Voortgezette Meetkunde deel IIA en deel IIB, herziene versie.
  Utrecht: Freudenthal Instituut, januari 1998.
- *A.W. Boon e.a.*
  Netwerk, vwo bovenbouw, Wiskunde B2
  Groningen: Wolters-Noordhoff, 1999.
- *Dick Bos e.a.*
  Moderne wiskunde, vwo bovenbouw, wiskunde B2 - deel 1
  Groningen: Wolters-Noordhoff, 1999.
- *R.A.J. Vuijk e.a.*
  Getal & Ruimte, vwo NT6
  Houten: Educatieve Partners Nederland, 1999.

Recreatieve wiskunde in Nederland in de 19de eeuw: het googchelaars-handboek

Danny Beckers

Inleiding

In de loop van de achttiende eeuw maakte de wiskunde zich los van de natuurwetenschap. Zij werd in de negentiende eeuw een zelfstandig onderzoeksveld. Deze ontwikkeling, en het verder oprukkende wiskundeonderwijs, hadden hun effect op de recreatieve wiskunde. In de negentiende eeuw zou de recreatieve wiskunde zich ontwikkelen tot de recreatieve wiskunde zoals we haar vandaag kennen. Niet zo heel verrassend, want ook veel van de hedendaagse opvattingen over wiskunde ontstaan juist in deze periode.

Een heel speciale, specifiek negentiende-eeuwse uitingsvorm van recreatieve wiskunde vormen de goochelboeken. Een van de meer bekende, het *Handboek voor googchelaars* uit 1802, staat in dit stuk model voor een schets van (een niet onbelangrijk) deel van de negentiende-eeuwse recreatieve wiskundebeoefening.


HANDBOEK

VOOR

GOOGCHELAARS,

OF

NATUUR- EN WISKUNDIGE VERMAAKLIJKHEDEN, KUNSTJES MET DE KAART EN GOOGCHELTASCH, GEZELSCHAPSSPELEN, &c.

MET FIGUREN.

AMSTERDAM,
bij W. Holtrop, 1802.

Status van de wiskunde

In de Franse tijd -in 1815 in het Organiek Besluit opnieuw officieel bekrachtigd- werd wiskunde als verplicht vak ingevoerd aan de Nederlandse scholen. De acceptatie van het nieuwe vak verliep niet overal even soepel, maar bij de oprichting van de H.B.S. in 1863 kon in elk geval worden vastgesteld dat het merendeel van de schoolgangers in de decennia daarvoor met 'de mathesis' had kennisgemaakt. Wiskunde werd door de sociale middenklasse en een groot deel van de regerende elite als een zeer belangrijk vak gezien, waarmee men niet alleen problemen kon oplossen, maar bovendien het individu hielp zijn verstand te scherpen. Juist vanwege die vormende waarde werd wiskunde in alle onderwijsvormen ingevoerd, maar het diende tevens als een handig selectiecriterium: wie wiskunde kende was slim.[1])

Het vertrouwen in en de status van de wiskunde zien we onder andere weerspiegeld in de groei van het *Wiskundig Genootschap* (opgericht 1778) te Amsterdam. In de negentiende eeuw groeide dit genootschap uit van een kleine locale groep van liefhebbers tot een landelijke organisatie met meer dan 200 leden, waarin naast de amateurs tevens velen uit de geleerde wereld trots hun lidmaatschap droegen. Het *Wiskundig Genootschap* beperkte zich voor 1875 hoofdzakelijk tot het uitgeven van leerboeken en opgavenseries om enige 'genoegelyke uurtjens' mee door te brengen.

Daarbij dient te worden aangemerkt dat meer in het algemeen de beoefening van kunsten en wetenschappen als een zeer gewaardeerde tijdsbesteding werd gezien. In tegenstelling tot wat wij gewend zijn werd wetenschap bedrijven opgevat als een vorm van zeer nut-

tige recreatie. Geleerde genootschappen waren er voor ieder vak, en in elke stad van betekenis. De fysicus/wiskundige J.H. van Swinden zou -volgens zijn biograaf- tijdens een rondleiding van een Franse gezant door Amsterdam vol trots hebben vermeld, dat de Nederlanders hun tijd liever in de beoefening van ‘nutte kunsten en wetenschappen’ staken, dan in nutteloze tijdverdrijven.[2]) Of Van Swinden dit nu echt heeft gezegd of niet: de uitspraak zal met een korreltje zout genomen moeten worden, maar geeft wel aan dat er in hogere maatschappelijke kringen een enigszins serieus tintje aan recreatieve wetenschapsbeoefening kleefde. Ook voor het *Wiskundig Genootschap* gold dat recreatieve wiskunde niet alleen diende om de beoefenaar te vermaken en te vormen, maar met name om wiskundige kennis meer algemeen bekend te maken. Men was ervan overtuigd dat wiskundige kennis heilzaam zou zijn voor de hele samenleving.[3])

Onderwijzers

Die serieuze toon treffen we zeer uitgesproken aan in de onderwijzerstijdschriften die op een recreatieve manier aandacht besteedden aan wiskunde. Onderwijzers werden, sterker nog dan in de achttiende eeuw, gestimuleerd om zich ook in de wiskunde te bekwamen, omdat er bij de wet op het lager onderwijs (lager = voor de lagere sociale klassen) van 1806 een stelsel van rangen voor de onderwijzers in het leven was geroepen. De eerste en hoogste rang was gereserveerd voor hen die ook in de wiskunde goed thuis waren.[4]) Vandaar dat in de *Bijdragen tot het Onderwijs en de Opvoeding* (1810-1873), *De Oefenschool* (1839-1877) en het *Tijdschrift voor aankomende onderwijzers* (1836-1849) regelmatig ook wiskundige artikelen en opgaven waren opgenomen.

Het *Tijdschrift ter bevordering der Mathematische Wetenschappen* (1823-1828), de *Bijdragen tot de beoefening der gewone cijferkunst* (1831-1840), *De beoefenaar der wiskunde* (1865-1870), het *Tijdschrift voor vormleer, rekenkunde en de beginselen der wiskunde* (1879-1882), en *De Vriend der Wiskunde* (1886-1913) waren tijdschriften die zich echt specifiek op de wiskunde richtten. Er zouden moeiteloos nog tien kunnen worden bijgevoegd, waarvan de lijst van intekenaren overwegend uit (aankomende) onderwijzers bestond. In deze tijdschriften stonden korte artikelen over wiskundige onderwerpen, afgewisseld met aardige opgaven. In hoeverre hier sprake was van studie of van recreatieve wiskunde is moeilijk na te gaan. De serieuze


TIJDSCHRIFT

AANVANKELIJKE BEOEFENAREN

Reken-, Stel- en Meetkunst.

EERSTE JAARGANG.

Dordrecht,
BIJ H. LAGERWEIJ.

ondertoon die in de titels van de tijdschriften doorklinkt geeft al aan dat er in elk geval, net als bij het Wiskundig Genootschap, een meer verheven doel aan de recreatie werd toegedicht. Voor de onderwijzers die in dergelijke tijdschriften participeerden was het duidelijk recreatie. Het rekenen in andere getalstelsels, en opgaven als de volgende[5]), kwam voor de meesten echter zowel in een leerproces, als in een recreatieve sfeer uitstekend tot hun recht:

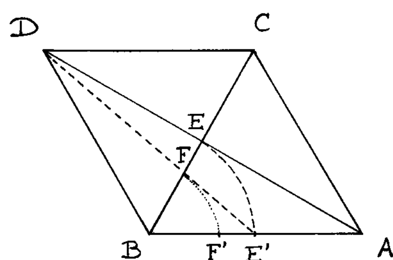
> Het jaar 1□▲■ is daardoor merkwaardig dat zekere Gravin, in *Walcherens* hoofdstad, toen door de krijgsbenden haars vaders belegerd werd. Om dit jaartal, dat uit vier verschillende cijfers bestaat, te berekenen, wordt bekend gegeven: $\blacksquare - \blacktriangle = \sqrt{\blacksquare} - \square$ en $\blacktriangle : \square = (2\sqrt{\blacksquare})^2 : \blacksquare$.

Ook het afschatten van breuken, de theorie van rijen en reeksen, de beginselen van de analyse, en het uitrekenen van permutaties of combinaties werd in dit soort tijdschriften behandeld en van opgaven voorzien. Allemaal onderwerpen die op zich ook voor verdere vorming van een leraar geschikt waren. Vorming was mogelijk ook wat de meeste onderwijzers voor ogen stond; dat was althans wat hun door de regering werd aanbevolen.[6])

Tijdschriften

Niet alleen in aparte tijdschriften, ook in meer algemene tijdschriften als de *Algemeene Konst- en Letterbode* werd af en toe plaats ingericht voor recreatieve wiskunde. Zo maakt de onderwijzer G. ten Brummeler in 1847 bijvoorbeeld gewag van een heel aardige constructie van de harmonische rij, die door een van zijn leerlingen was bedacht. De con-

structie is zeer elementair, maar blinkt tevens uit in elegantie: neem een lijnstuk AB (de eenheid) en teken daarop de gelijkzijdige driehoek *ABC*. Zet op de zijde *BC* opnieuw een gelijkzijdige driehoek *BCD*. De vierhoek *ABDC* vormt dan een ruit. Trek de diagonaal *AD*, die snijdt *BC* in *E*. Cirkel *BE* om naar *BE'*, met *E'* op *AB*. Dan geldt $BE' = \frac{1}{2}AB$. Trek nu *E'D*, die snijdt *BC* in *F*, cirkel *BF* om naar *BF'* op *AB*. Dan is *F'B* een derde van *AB*.



Dit proces kan met het trekken van *F'D* worden voortgezet en levert zo achtereenvolgens een vierde, een vijfde van *AB* en zo verder.[7]) Het bewijs berust op het trekken van de lijn vanuit de punten *E'*, *F'* etc. evenwijdig aan *BC* naar *AC*, en het toepassen van gelijkvormigheid.
Een andere vorm van wiskundige recreatie die in deze tijdschriften stonden waren 'rekenkundige' anecdotes, zoals die over de 'schrandere Louize', die tijdens een feestje een vraag gesteld hoorde worden: een vader had twaalf zonen, en elke zoon had één zus. Gevraagd was het aantal kinderen dat de man in totaal had. Iedereen antwoordde 24, maar Louize antwoordde heel beslist 13:

> Men wilde het niet gelooven; maar de sluwe Louize bewees haar stelling mathematisch, dewijl zij betoogde, dat bij de twaalf zonen, slechts ééne dochter behoorde, die dan de zuster van alle twaalf broeders was, en er dus in 't geheel maar dertien kinderen waren; 'want,' vervolgde zij, 'indien er bij de twaalf zonen nog twaalf dochters waren, dan had iedere zoon niet ééne, maar twaalf zusters gehad.'

Haar schranderheid leverde Louize natuurlijk veel bewondering op; een van de mannen in het publiek valt voor haar, vraagt haar ten huwelijk, en samen krijgen ze twaalf dochters en een zoon.[8])
Het feit dat er recreatieve wiskunde opduikt in algemene tijdschriften (De *Algemene Konst- en Letterbode* was een soort 19de-eeuwse *Panorama*, maar dan met meer roddels en minder blote dames) toont aan dat de beoefening van recreatieve wiskunde een zeer brede verspreiding kende. Dit soort wiskundige grapjes, en dus ook enige elementaire reken- en meetkundige kennis, trok een breed publiek.

Bijgeloof

Zowel wiskunde als natuurwetenschap werden in de negentiende eeuw als nieuwe vakken aan de lagere scholen ingevoerd. De idee achter wis- en natuurkunde voor de lagere klasse kwam voort uit de idealen van de Volksverlichting. Verlichting verhief de mensen namelijk niet alleen boven het dier, ze maakte de mens ook minder bevattelijk voor oproer omdat redelijke mensen zich niet als dom vee lieten opjutten.[9]) Ten behoeve van de natie diende het volk dus te worden Verlicht. Om de Verlichting een kans te geven, moest in de ogen van de volksverlichters eerst een einde gemaakt aan het achterlijke bijgeloof.
Op vele manieren werd het bijgeloof bestreden. In anecdotes en analyses van waarzegsters en de populaire 'kennis' van het dierlijk magnetisme werd keer op keer aangetoond dat bedrog en lichtgelovigheid nauw samenhingen.[10]) Er was nogal wat bijgeloof om tegen op te treden: in de ogen van de negentiende-eeuwse elite liet het 'gemeene volk' zich met name op kermissen graag door charlatans een rad voor ogen draaien. Homeopathie en astrologie moesten het bij de Verlichte middenklasse ontgelden. Met de volgende anecdote werd bijvoorbeeld gepoogd een einde te maken aan het geloof in astrologische voorspellingen: aan het hof van een sultan werd een astroloog ontboden en gevraagd een voorspelling te doen over de lengte van zijn leven. Hij schatte die -niet op de hoogte van de snode plannen aan het hof- op 20 jaar. Na deze voorspelling werd hem het hoofd afgehakt. De sultan, die de astroloog aanvankelijk geloofd had, was uiteraard onmiddellijk van zijn bijgeloof genezen.[11])
Een van de manieren waarop tegen bijgeloof werd opgetreden was met wiskunde- en natuurkundeonderwijs. Een andere manier vormden de goochelboeken. Daarin werden natuurlijk allerlei raadselachtige gebeurtenissen van een rationele verklaring voorzien, en dat was ook precies waarom ze werden gewaardeerd.[12]) Vanaf het begin van de eeuw verschenen boeken als *Tooververtellingen der Wetenschap* (1859), die gepast vermaak boden, en daarnaast uitdrukkelijk ook bedoeld waren om de volksklasse te laten zien dat alles rationeel verklaarbaar was.[13]) Reken- en wiskunde speelden in veel van deze boeken een belangrijke rol.

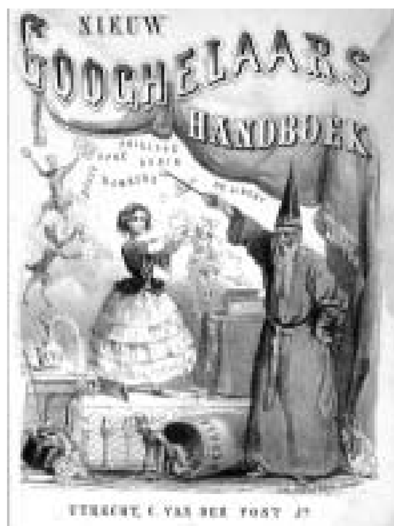
Het handboek

Een van de meest populaire van deze boeken was het *Handboek voor googchelaars*, voor het eerst verschenen in 1802, dat in 1850 een derde editie beleefde. In 1852 verscheen het *Nieuw goochelaars handboek*, en enkele decennia later *De onovertroffen goochelaar en*

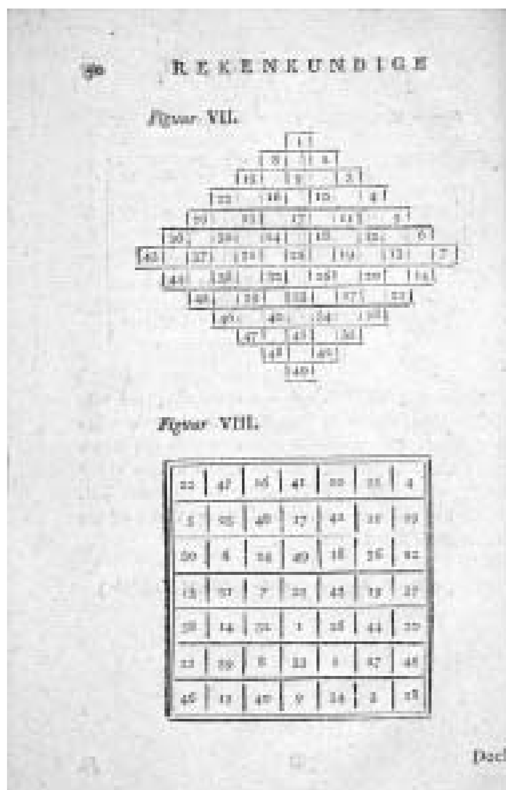
toovenaar - boeken die qua inhoud nog enigszins aan 'het handboek' doen denken en gezamenlijk de negentiende eeuw beslaan. Weliswaar waren deze laatste boeken - getuige alleen al de titelprent van de eerste - meer populair van opzet, maar ze vertoonden toch behoorlijk wat overlap in de 'wiskundige' trucs.[14]) Het handboek heeft, zo lijkt het, invloed gehad op de inhoud van een hele serie van dergelijke lectuur. Daarmee is het gerechtvaardigd het *Handboek voor googchelaars* eens nader te bekijken.
De anonieme auteur geeft in zijn voorwoord[15]) aan dat hij hoge achting heeft voor de wiskunde, en dat met name op wiskunde gebaseerde trucs erg leerzaam zijn:

> De Googchelarij heeft haar gebied ten koste van alle andere Weetenschappen opgeregt: de Natuur-, de Wis-, de Schei-, de Werktuig-, de Gezigtkunde enz. hebben mede iet toegebragt, om dezelve te verrijken en te versieren; doch vooräl heeft zij aan de kennis der Getallen oneindig veele verpligting. Aan de Rekenkunde is men de meeste kunstjes met de kaart verschuldigd. 'Er zijn, wel is waar, veelen, die niet dan vaardigheid met de handen vereischen, of waarvan al het fijne bestaat in daartoe bereide kaarten; dan men moet bekennen, dat dergelijke kunstjes, behendig gedaan, geene van de minste verwondering wekkenden zijn.

Dat kwam ook tot uitdrukking in de inhoud: veel trucs waarin een getal moest worden geraden, maar ook de ontwikkeling van een geheimtaal in cijfers kwam aan bod, en er werd gesproken over het tellen van kaarten en dergelijke. Tovervierkanten kwamen ook aan bod. Een van de leukste rekenkundige trucs maakte gebruik van de



negenproef: je legt iemand een lijst met getallen voor, laat hem er daar twee uit kiezen en die vermenigvuldigen, en vervolgens uit de uitkomst een cijfer wegstrepen. Nu krijg je de overige cijfers van de uitkomst, en dan zul je raden welk getal er is weggestreept. De truc schuilt natuurlijk in de lijst met getallen: die bevatte slechts negenvouden (er had met drievouden volstaan kunnden worden), zodat het product een negenvoud was, en uit de som der cijfers kon worden afgelezen welk getal werd weggestreept.



Aan de andere kant was er in het boek ook plaats gemaakt voor meer banale trucs, om de lezers erop te wijzen dat de kermistrucs alle op bedrog berustten en allemaal logisch verklaard konden worden. Het was een van deze kermistrucs die door een van de recensenten van de eerste editie speciaal in de recensie vernoemd werd: de mogelijkheid namelijk om (met behulp van een handig verborgen koordje) een duif te onthoofden door met een zwaard op haar schaduw te slaan.[16]) Latere recensies van goochelboeken legden echter de nadruk op het educatieve element, en stelden zich nadrukkelijk op achter het hierboven geciteerde.[17])

Conclusies

Gedurende de eerste helft van de negentiende eeuw speelden op de achtergrond van de recreatieve wiskundebeoefening zeer sterk de idealen van de volksverlichting. In dat kader moest (onder andere recreatieve) wiskunde helpen om het bijgeloof onder de bevolking te bestrijden. Die bestrijding van het bijgeloof vond onder andere plaats in goochelboeken, waarin de auteurs duidelijk maakten dat de waarde van een truc evenredig was aan de hoeveelheid wiskunde die er achter stak.
Voor ingenieurs en onderwijzers had de recreatieve wiskunde de invulling die wij er vandaag de dag nog steeds aan geven. De serieuze ondertoon die eraan werd gegeven kwam voor een belangrijk deel voort uit het ontzag voor en het belang dat gehecht werd aan het nieuwe vak van onderwijs. Een heel belangrijk verschil met de recreatieve wiskunde van vandaag is de spreiding:

gedurende een groot deel van de negentiende eeuw trof zelfs de lezer van algemene tijdschriften als de *Konst- en Letterbode* recreatieve wiskunde aan in de vorm van raadsels, mooie constructies en anecdotes.

Het negentiende-eeuwse goochelboek was duidelijk een ander geschrift dan zijn pendant van na 1900. Gedurende de tweede helft van de negentiende eeuw zou het (volks)opvoedkundige element in het goochelboek verdwijnen. Niet dat het bijgeloof werd toegejuicht en bevorderd (hoewel een bezoek aan een gemiddelde boekwinkel misschien anders doet vermoeden), maar de bestrijding ervan vond niet langer plaats via deze lectuur: het hooggeëerde publiek na 1900 werd niet op de eerste plaats met rekenraadsels vermaakt.

Noten

1 Vergelijk: *H.J. Smid*, **Een onbekookte Nieuwigheid**, Delft (1997) voor het middelbaar onderwijs; *E. de Moor*, **Van vormleer naar realistische meetkunde**, Amsterdam (1999) voor het lager onderwijs.
2 *D. van Lennep*, **Hulde aan de nagedachtenis van J.H. van Swinden**, Amsterdam (1824)
3 *P.C. Baayen*, 'Wiskundig Genootschap 1778-1978' in: **Nieuw Archief voor Wiskunde** (3) **XXVI** (1978), pp. 177-205
4 *M. de Vroede*, **Van Schoolmeester tot Onderwijzer**, Leuven (1970), p. 141 en p. 357
5 **Bijdragen tot de beoefening der gewone cijferkunst IV** (1836), p. 57
6 *D.J. Beckers*, '**Uitmuntend in beschaafdheid en verstand**', verschenen in de rapportenserie van Wetenschap & Samenleving aan de K.U. Nijmegen (nr. 9801).
7 **Algemeene Konst- en Letterbode** 1847-I, pp. 49-50
8 'Nieuwe rekenwijze' in: **De Recensent XVIII** (1825) dl. 1, pp. 509-510
9 Letterlijk aldus verwoord in: *C.A. Agardh*, 'Over de Verlichting der Lagere Volksklasse' in: **Vaderlandsche Letteroefeningen** 1840-2, pp. 369-383, 421-435
10 Bijvoorbeeld: 'Getuigenis eener waarzegster' in: **Vaderlandsche Letteroefeningen** 1819-2, pp. 635-636
11 **Algemeene Vaderlandsche Letteroefeningen** 1802-2, p. 672
12 Zoals blijkt uit de recensie van *J.H.M. Poppe*, **De Tooverkunst en Googelarij** (1821) in: **Vaderlandsche Letteroefeningen** 1822-1, pp. 522-523
13 *J.C. Brough*, **Tooververtellingen der Wetenschap** (1859)
14 Respectievelijk: **Nieuw goochelaars handboek**, Utrecht (1852) en **De onovertroffen goochelaar en toovenaar**, Deventer (ca. 1878), derde editie 1894. In het **Nieuw goochelaars handboek** kwam bijvoorbeeld het tovervierkant terug, evenals een aantal van de rekenraadsels uit het **Handboek**; alleen werden ze nu als trucs gepresenteerd die 'eigenlijk een rekenkundige achtergrond hadden' en geen vaardigheid van de goochelaar vereisten.
15 **Handboek voor googchelaars, of natuur- en wiskundige vermaaklijkheden**, Amsterdam (1802), p. IV
16 **Algemeene Vaderlandsche Letteroefeningen** 1803-1, p. 138
17 Zie bijvoorbeeld de recensie in: **Vaderlandsche Letteroefeningen** 1860-I, pp. 260-261. Daarin schrijft de recensent dat het boek **Tooververtellingen der Wetenschap** (1859) gelukkig niet zo oppervlakkig is als de titel misschien doet vermoeden.

Honderd jaar wiskunde-onderwijs (8)

Het idee voor een jubileumboek wordt voor het eerst geopperd in 1996. Het idee is om een jubileumboek te laten verschijnen over het reilen en zeilen van het wiskunde-onderwijs in de periode waarin de vereniging bestond, dus vanaf 1925.
Op 17 april 1997 komt een aantal genodigden op het Freudenthal Instituut bijeen om de prille gedachten aan een jubileumboek nader vorm te geven. Er worden inhoudelijke thema's aangedragen en tevens potentiële auteurs met naam en toenaam genoemd. Ook dient zich een redactiecommissie aan.
Op 18 juni 1997 vindt een tweede bespreking plaats en op 8 oktober 1997 komt de hele groep auteurs in de voorlopige samenstelling voor het eerst bijeen. Op die bijeenkomst wordt onder meer de vraag gesteld wat ieder zich persoonlijk bij het te maken boek voorstelt. In een rondje 'vrij associëren' komt duidelijk naar voren dat de grote meerderheid uitgaat van een bundel opstellen met een kaleidoscopisch karakter. Maar de auteurs zijn het op meer punten roerend met elkaar eens. Het boek moet mooi vormgegeven zijn en ten minste gebonden worden, het moet inspirerend zijn voor wiskundeleraren en studenten aan lerarenopleidingen, en ook voor hun opleiders. Maar het dient ook interessant genoeg te zijn voor mensen die op een of andere wijze geïnteresseerd zijn in het wiskundeonderwijs uit die periode, bijvoorbeeld omdat zij het in die tijd als leerling hebben meegemaakt. Er is dus een brede doelgroep, wat hoge eisen stelt aan de te maken teksten. Pierre van Hiele voegt er nog iets aan toe. Hij is tevreden als het boek een plaats zal krijgen op zijn nachtkastje, zo voor het grijpen om op rustige momenten te worden ingekeken. Alle aanwezigen weten nu hun hoofdstuk, al zijn er nog enkele lege plekken waarvoor een auteur gezocht moet worden. Genoemd worden onder andere de ambachtschool en de mulo, vrouwen en wiskunde, en de wiskundeakten.

In het jaar daarop, 1998, komt de groep tweemaal bijeen, op 18 maart en op 26 november. Enkele nieuwe auteurs schuiven aan, er worden gedachten uitgewisseld over inhoud en vormgeving van het boek en op enkele onderdelen begint het verleden al tot leven te komen. Er worden ook nieuwe ideeën gelanceerd, zoals het vragen van bekende Nederlanders om iets te vertellen over hun herinneringen aan het wiskundeonderwijs op school. De redactie maakt een collegiaal schrijfadvies voor de auteurs en stelt een strak tijdpad op. In toenemende mate krijgt iedereen het gevoel met iets moois bezig te zijn. Pierre van Hiele schrijft een proefhoofdstuk dat naar meer smaakt en de handgeschreven inzending van de 104-jarige Dirk Struik geeft een echte kick.

Op een van de bijeenkomsten wordt de titel aan de orde gesteld. Men kiest unaniem uit de diverse creatieve voorstellen voor 'Honderd jaar wiskundeonderwijs'. Honderd jaar, zo wordt geredeneerd, kan ruim worden opgevat, wat bij 75 jaar veel minder het geval is. Honderd jaar schept de ruimte om bijvoorbeeld ook Thorbecke (hbs, mms) te kunnen noemen, en Jan Versluys, de grote didacticus uit de 19de en begin 20ste eeuw.
Vanuit welke invalshoeken is het jubileumboek geschreven? Dat zijn (examen)programma's en leerplannen, leerstof en schoolboeken, visies en doelstellingen, didactiek en lesgeven, leraren, hun vereniging en de tijdschriften, schooltypen, wiskundecompetities, de opleiding van leraren, vrouwen en wiskunde en ontwikkelwerk. En de leerlingen komt de lezer in bijna alle hoofdstukken tegen, vaak op de achtergrond, soms zijn ze heel duidelijk aanwezig. Bedenk wel dat de genoemde invalshoeken geen hoofdstukken zijn. In de meeste hoofdstukken is voor meer dan één invalshoek gekozen, en het komt vaak voor dat een ervan het centrale thema bepaalt.

Hiermee komen we bij een tweede redactioneel probleem: is er niet teveel overlap? Eigenlijk is hier de vraag of we te maken hebben met een boek of met een bundel. In een bundel met losstaande opstellen is overlap geen ramp, in een boek kan overlap als storende herhaling worden opgevat. De redactie heeft in de loop der tijd het idee van een bundel met puur op zichzelf staande opstellen verlaten omdat ze een geheel van samenhangende hoofdstukken tot stand zag komen.
Wat voor samenhang wordt hier

bedoeld? In de eerste plaats gaan alle hoofdstukken over het wiskundeonderwijs in de twintigste eeuw. Bepaalde hoogtepunten kunnen als ankerpunten in het geheel van het boek voor een zekere structuur zorgen. Denk aan de Commissie Beth-Dijksterhuis uit de jaren ’20, de periode van de Wiskunde Werkgroep van de WVO, het Wimecos-leerplan van ’58, het afschaffen van de beschrijvende meetkunde, de invoering van de infinitesimaalrekening, de New Math, het seminar in Royaumont in 1959, de CMLW in de jaren ’60, de mammoetwet in 1968, het IOWO in de jaren ’70, Hewet en Hawex, enzovoort. Men kan als lezer nu vanuit verschillende invalshoeken op deze ankerpunten terecht komen. Dat levert enerzijds overlap (‘las ik dat al niet eerder?’), maar geeft anderzijds samenhang (‘dat verband had ik nog niet gelegd’).
Beschouw dus dit boek als een bundel opstellen met grote samenhang, ook al zijn de hoofdstukken door verschillende auteurs aan het papier toevertrouwd.
De lezer kan de hoofdstukken in een zelfgekozen volgorde doorlezen, meer of minder gestuurd door de aanwezige samenhang en zeker gevoed door de eigen belangstelling; hoe dan ook, hij brengt zodoende zijn ‘eigen boek’ tot stand.

De redactiecommissie

40 jaar geleden

1195
De punten A_1'', A_2'', A_3'' zijn opv. de middens van de hoogtelijnen A_1A_1', A_2A_2' en A_3A_3' van de scherphoekige driehoek $A_1A_2A_3$.
Bewijs:
$\triangle A_1'A_2''A_3'' \sim \triangle A_1''A_2'A_3'' \sim \triangle A_1''A_2''A_3' \sim \triangle A_1A_2A_3$.

1196
Gegeven $\triangle ABC$ en het lijnstuk k.
Gevraagd door C een lijn te construeren zo, dat de som der projecties van CA en CB daarop gelijk is aan k.

1198
Het grondvlak ABC van het viervlak $ABCD$ is een gelijkzijdige driehoek met zijde $2p$. De opstaande ribbe $AD = p$.
De bissectrice van hoek BAD snijdt BD in E; de bissectrice van hoek CAD snijdt CD in F.
a Bewijs dat EF evenwijdig is aan het grondvlak. Men brengt door EF het vlak aan evenwijdig met AD; dit vlak snijdt AB in H en AC in G.
b Als gegeven is dat de ribben AD en BC elkaar loodrecht kruisen, bewijs dan dat de vierhoek $EFGH$ een vierkant is.
c Als gegeven is dat de ribben AD en BC elkaar loodrecht kruisen en bovendien dat AD gelijke hoeken maakt met de zijvlakken ABC en DBC, druk dan de inhoud van het viervlak $ABCD$ in p uit.
(H.B.S.-B, 1959)

1199
In welke gevallen is het stelsel $\begin{cases} \cos x + \cos y = a \\ \sec x + \sec y = b \end{cases}$

oplosbaar?

Vraagstukken uit Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 47 (1959-1960)

David van Dantzigs honderdste geboortedag op 23 september 2000

Symposium, vrijdag 22 september 2000



Aula van de UvA aan het Singel, hoek Spui

Programma

10:00 Ontvangst met koffie
10:20 Opening, T. Koetsier (VU), voorzitter GMFW
10:25 *Van Dantzigs topologische en differentiaal-meetkundige werk in de tijd geplaatst*
W.T. van Est (em. UvA)
11:05 Aanbieding biografie en wetenschappelijke stamboom aan de familie Van Dantzig
11:15 Koffie
11:45 *Mannoury, significa, Wiener Kreis en Unity of science in de jaren 1930*
L. Bergmans (Tours)
12:10 *Van Dantzigs opvattingen over didactiek van de wiskunde*
H.J. Smid (TU Delft)
12:35 *Een persoonlijke herinnering*
N.G. de Bruijn (em. TU Eindhoven)
13:00 Lunch
14:15 *Wiskundig modelleren en dienstbaarheid van de wiskunde volgens Van Dantzig*
G. Alberts (CWI/KUN)
14:40 *Van Dantzigs betekenis voor de mathematische statistiek in Nederland*
W.R.van Zwet (em. Leiden/EURANDOM)
15:25 Thee
16:00 Forum over de *Hedendaagse maatschappelijke functie van wiskunde en de mathematische statistiek*
met Van Dantzig-laureaten, onder wie
A.H.G. Rinnooy Kan en
W.R. van Zwet p.m. voorzitter
17:00 Borrel

Publicaties
Op de dag van het symposium verschijnen drie publicaties, uitgegeven door de Stichting Mathematisch Centrum:

- *Twee geesten van de wiskunde*, biografie van David van Dantzig, door Gerard Alberts
- *The Scientific Family Tree of David van Dantzig* door Constance van Eeden
- *Van Dantzig 2000*, Proceedings symposium, door Gerard Alberts en Hendrik Blauwendraat (red.)

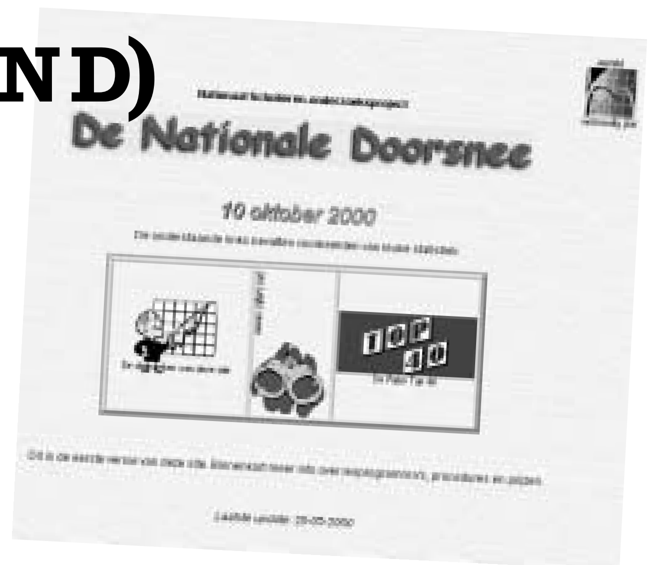
Inschrijving symposium
Deelneming is gratis, inschrijven vooraf is noodzakelijk en wel bij Simone van der Wolff per e-mail (Simone.van.der.Wolff@cwi.nl), electronisch of per post:
Centrum voor Wiskunde en Informatica
t.a.v. Simone van der Wolff
Postbus 94079
1090 GB Amsterdam

De drie boeken kunt u *uitsluitend* verkrijgen door ze *vooraf* te bestellen. Indien u het verschuldigde bedrag *ƒ* 75,– overmaakt op rekening 31.35.57.977 van de Stichting Wiskunde en Informatica Conferenties bij de RABO-bank te Amsterdam onder vermelding van uw naam en **Van Dantzig 2000**, ligt het pakket op 22 september voor u klaar.

Van Dantzig 2000 is een activiteit van het landelijk werkcontact Geschiedenis en Maatschappelijke Functie van de Wiskunde (GMFW) en wordt gesponsord door NWO, het CWI en de instituten KdV (Korteweg-de Vries Instituut) en IBIS (Instituut voor Bedrijfs- en Industriële Statistiek) van de Universiteit van Amsterdam.



De Nationale Doorsnee (DND)



Wie is de gemiddelde leerling van Nederland?

In het nummer 6 van Euclides heeft u kunnen lezen over het grootschalige statistiekproject De Nationale Doorsnee.
Dit project is bedoeld voor alle leerlingen van klas 1 en 2 in het voortgezet onderwijs.
In het volgende, speciale nulnummer van Euclides zal nog veel uitgebreider ingegaan worden op dit unieke project in het kader van het Wereld Wiskundig Jaar 2000.
Hiernaast treft u de data aan die van belang zijn voor dit project.

Februari tot mei
Voorbereiding van het project door APS, CBS, Freudenthal Instituut, SLO, stichting WeTeN en stichting Wiskunde 2000.
Aankondigingen in Euclides, Wiskrant, Nieuw Archief voor de Wiskunde.

Begin juni
Pilot, testen van de logistiek van het project.

Eind juni
De wiskundesecties ontvangen de inschrijfformulieren en informatiepakketten.

September
De wiskundedocenten ontvangen de deelnemerspakketten.

Dinsdag 10 oktober 2000, in de WeTeNschaps- en Techniekweek
Uitvoering van het project op de scholen, onthulling van ***De Nationale Doorsnee*** en de uitreiking van de prijzen.

Staat dinsdag 10 oktober 2000 al in uw schoolagenda, als de wiskundedag dat uw school gaat meedoen aan ***De Nationale Doorsnee***?

Uitgebreide informatie kunt u ook vinden op de website van ***De Nationale Doorsnee***: doorsnee.fee.uva.nl/home/home.html

Telefonische informatie via:
Philip van Schaik
030-2611611 (wo,do,vr)
P.vanSchaik@fi.uu.nl

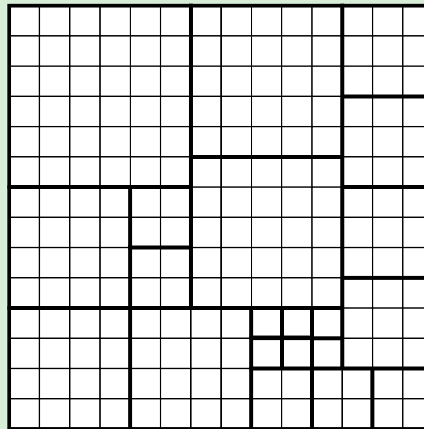
Opgave 701

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan

Jan de Geus
Valkenboslaan 262-A
2563 EB Den Haag

Recreatie

Het is algemeen bekend dat de vergelijking $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = k^2$ slechts de unieke oplossing $n = 24$ en $k = 70$ heeft, als n en k gehele getallen moeten zijn. Het bewijs is vrij ingewikkeld en meetkundig passen de eerste 24 vierkanten NIET in een 70 bij 70 vierkant. (zonder overlapping, uiteraard.)



Bekijk nu eens $n \cdot 1^2 + (n-1) \cdot 2^2 + (n-2) \cdot 3^2 + \ldots + 1 \cdot n^2 = k^2$.
Dan is er onder andere een oplossing voor $n = 6$ met $k = 14$.
Meetkundig is er zeer gemakkelijk een oplossing te vinden omdat er zoveel kleine vierkantjes zijn. In de tekening ziet u dat deze 21 vierkanten precies in een 14 bij 14 vierkant passen.

Tot slot (de recreatiepuzzel van deze maand) bekijken we $1 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 3^2 + \ldots + n \cdot n^2 = k^2$.
Nu is er voor elke gehele n een oplossing!!

Immers $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Dus bij elke gehele n hoort $k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Meetkundig is het lastig: er zijn teveel grote vierkanten! Pas bij $n = 8$ lukt het de 36 vierkanten tot een 36 bij 36 vierkant te leggen.

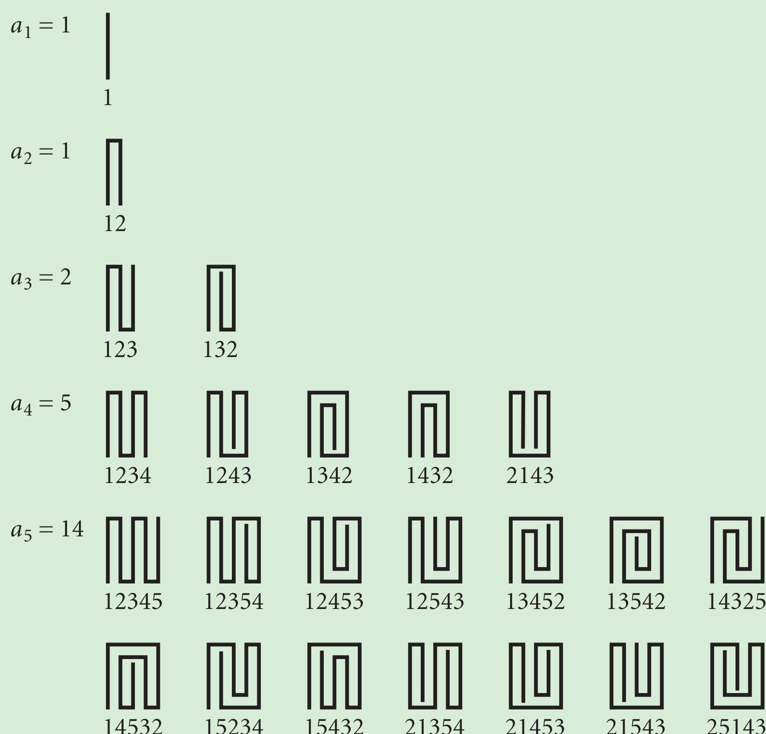
Als vakantiepuzzel deze keer:
Probeer één vierkant van 1 bij 1, twee vierkanten van 2 bij 2, drie vierkanten van 3 bij 3, vier vierkanten van 4 bij 4, vijf vierkanten van 5 bij 5, zes vierkanten van 6 bij 6, zeven vierkanten van 7 bij 7 en acht vierkanten van 8 bij 8 te leggen tot een 36 bij 36 vierkant.

Als u binnen TWEE maanden één van de vele oplossingen vindt en instuurt, dan ontvangt u vijf punten voor de doorlopende ladderwedstrijd.

Heel veel legpuzzel-vakantie-plezier!

Oplossing 698

Het is niet eerder voorgekomen dat er zoveel foutieve oplossingen zijn ingestuurd. Zelfs gerenommeerde puzzelaars lieten hier een steekje vallen!
Het ging deze keer over een strip met *n* ongenummerde postzegels, die tot een stapeltje moest worden gevouwen. Neem bijvoorbeeld een smalle strook wit papier en vouw dit tot een stapeltje. Op hoeveel verschillende manieren kun je dit doen? In de oplossing heb ik de stapeltjes een kwart slag gedraaid, zodat de codering beter tot zijn recht komt.



Tot en met 10 **ongenummerde** postzegels is het (theoretisch) aantal manieren om een stapeltje te vouwen:
1, 1, 2, 5, 14, 38, 120, 353, 1148 en 3527.

Voor zover ik weet is er nog geen formule bekend, die het aantal manieren voor *n* postzegels berekent.
Voor de liefhebber: op hoeveel manieren kan een strip echte postzegels tot een stapeltje gevouwen worden? Bedenk dat op de voorkant een afbeelding staat en op de achterkant een gomlaag zit!

Met 60 punten is winnaar van een boekenbon van ƒ 50,–:

Kees Nagtegaal
Haasdijkweg West 42
3319 GD Dordrecht

Heel hartelijk gefeliciteerd!

KALENDER

In deze kalender kunnen alle voor wiskundedocenten toegankelijke en interessante bijeenkomsten worden opgenomen. Wil eenieder die relevante data heeft, deze zo spoedig mogelijk doorgeven aan de hoofdredacteur? Hieronder treft u de verschijningsdata aan van Euclides in het komende schooljaar. Achter de verschijningsdatum is de deadline voor het inzenden van mededelingen vermeld. Doorgeven kan ook via e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl

nr.	versch.	deadline
1	07-09-00	06-07-00
2	12-10-00	29-08-00
3	23-11-00	12-10-00
4	04-01-01	16-11-00

Symposium UvA
David van Dantzigs honderdste geboortedag
vrijdag 22 september 2000
www.cwi.nl/conferences/Dantzig2000
Zie Euclides 75-8, p. 284

Vierkant zomerkampen
kamp A: 7-11 augustus 2000
Groep 6,7,8, brugklassers
kamp B: 14-18 augustus
Alle leerlingen voortgezet onderwijs
Vierkant: 020-4447776
www.cs.vu.nl/~vierkant
Zie Euclides 75-7, p.244

9th International Congress on Mathematical Education (ICME)
31 juli - 6 augustus 2000
Tokyo, Japan
www.ma.kagu.sut.ac.jp/~icme9

T^3-symposium in Oostende
Teachers teaching with technology
di. 22 - do. 24 augustus 2000
www.aps.nl

Vakantiecursus 2000
Is wiskunde nog wel mensenwerk?
Eindhoven
vr. 25 aug en za. 26 aug. 2000
Amsterdam
vr. 1 sept en za. 2 sept. 2000
Meer informatie:
www.cwi.nl/conferences/vc2000

APS-conferentie
Wiskunde in de Tweede fase
wo. 4 oktober 2000
www.aps.nl
030-2856722
Aankondiging volgt

APS-conferentie
Wiskunde in het vmbo
wo. 11 oktober 2000
www.aps.nl
030-2856722
Aankondiging volgt

De Nationale Doorsnee
Statistiekproject voor klas 1 en 2 op alle scholen in Nederland
di. 10 oktober 2000
Zie ook Euclides 75-6 p.197
Uitgebreide informatie op de website:
doorsnee.fee.uva.nl/ home/home.html
Let op het speciale nulnummer dat eind augustus verschijnt.

NVvW-Lustrumconferentie
vr. 17 en za. 18 nov. 2000
Het 75-jarig bestaan van de Vereniging.
Zie ook: www.nvvw.nl
Let op het speciale nulnummer dat eind augustus verschijnt.

Voorronde Wiskunde A-lympiade 2001
Wiskunde B-dag
vrijdag 24 november 2000
www.fi.uu.nl

Nationale Wiskunde Dagen
vr. 2 + za. 3 februari 2001
www.fi.uu.nl
030 2611611
Zie Euclides 75-8, p. 281

Internetsites voor wiskundedocenten:

NVvW website
De website van de NVvW staat nog steeds boordevol actuele informatie:
http://www.nvvw.nl
- *Alle informatie over de examens*
- *Een uitgebreide aankondiging van het lustrumcongres*

Reacties op examens en nog veel meer
www.kennisnet.nl

Wereld Wiskundig Jaar 2000
De Nationale Doorsnee in Nederland
doorsnee.fee.uva.nl/home/home.html
Prachtige posters uit Engeland
www.newton.cam.ac.uk/wmy2kposters
Duitse initiatieven:
wmax02.mathematik.uni-wuerzburg.de/~gdm/wmy2000/index.html
En nog veel meer op:
www.ams.org/index/meetings/wmy2000.html

Wiskunde-Olympiade Opgaven en uitwerkingen
olympiads.win.tue.nl/nwo
Zie ook:
www.win.tue.nl/~kangoeroe

TWIN-mto-examens
www.fi.uu.nl/twin
Zie Euclides 75-8, p. 260

Website Pascal
www.pascal-online.nl

Interessante onderwijs-sites
www.bbc.co.uk/education
www.bbc.co.uk/worldservice/education

Vierkant zomerkampen
www.cs.vu.nl/~vierkant

Wetenschappelijk onderzoek door leraren:
www.nwo.nl/ew/nieuws
Zie Euclides 75-7, p. 245

Suggesties voor interessante sites of interessante freeware voor wiskundedocenten graag zenden aan e-mail: redactie-euclides@nvvw.nl